EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC

A. I.
KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKA

ÍRTA:
KOKITS ZSIGMOND

HARMADIK, JAVÍTOTT KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1961

EGYETEMI SEGÉDKÖNYVSOROZAT

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

FAZEKAS FERENC

EGYETEMI DOCENS

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

BAJCSAY PÁL
EGYETEMI ADJUNKTUS

FREY TAMÁS
EGYETEMI ADJUNKTUS

SZEMLÉLTETÉS:

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 147

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

1961

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

EGYETEMI SEGÉDKÖNYVSOROZAT

KÖTETEI:

A.

A. I. Középiskolai matematika (Harmadik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények
A. III. Differenciálszámítás (Második kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál
A. V.* Határozott integrál (Első rész)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk
A. VII. Többváltozós függvények integrálása
A. VIII. Taylor-sorok
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek
A. X.* A logarléc (Második kiadás)

B.

B. I—II—III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzorterek)
B. IV. Komplex függvénytan
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
B. VII. Közönséges differenciálegyenletek
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények
C. II. Variációszámítás
C. III. Integrálegyenletek
C. IV. Mátrixszámítás
C. V. Valószínűségszámítás
C. VI. Matematikai összefoglaló

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

KIADÁSÁT

A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER

RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveir ek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédének közreműködését.

*Munkánk A. és B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú, jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásán:k ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá, egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B. és C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ez úton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyv-osztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot, 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsó sorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetítettképes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

A. I.

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKA

ÍRTA:

KOKITS ZSIGMOND

EGYETEMI ADJUNKTUS

Harmadik, javított kiadás

ELŐSZÓ E KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

E füzetben a középiskolai matematikai anyag összefoglalását óhajtjuk adni azoknak, akik a műszaki tudományokban kívánják magukat képezni. Ez az összefoglalás kettős célt szolgál: egyrészt felhívja a figyelmet a legfontosabb matematikai alapismeretekre, másrészt rávilágít arra, hogy a műszaki élet legegyszerűbb problémái közül számos már ezzel az elemi matematikai apparátussal is megoldható.

A Műszaki Egyetem megkívánja hallgatóitól, hogy a mennyiségtan elemeit teljes biztonsággal kezeljék, azt önállóan tudják alkalmazni, mert enélkül a felsőbb matematikai anyag elsajátítása lehetetlen. Éppen ezért e füzet az elméleti összefoglalás mellett számos olyan feladatot tartalmaz, amely egyrészt előkészíti a felsőbb matematikai oktatást, másrészt műszaki alkalmazásokat mutat be.

Hangsúlyozni kívánom, hogy e füzet azok részére készült, akik az itt feldolgozott anyaggal már foglalkoztak. A teljesen járatlan olvasó kizárólag e füzetből nem tanulhatja meg a középiskolai matematikát.

A példatári anyag összeállításánál a kötet végén felsorolt forrásmunkákon kívül elsősorban személyes tapasztalataimra támaszkodtam, melyeket egyrészt középiskolákban és a Budapesti Műszaki Egyetem esti előkészítő tanfolyamán, másrészt a Budapesti Műszaki Egyetemen eltöltött néhány év alatt egyetemi oktatói munkám folyamán szereztem. Felhasználtam továbbá Raisz Iván adjunktus kartárs gazdag példagyűjteményét. E segítségéért e helyen is köszönetet mondok.

Munkám megírása közben dr. Bálint Elemér tanszékvezető docens és Fazekas Ferenc adjunktus kartársak értékes elvi és gyakorlati útmutatásaikkal állandóan és a legnagyobb készséggel voltak segítségemre. Szíves támogatásukért ezen a helyen is hálás köszönetemet fejezem ki.

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERZŐ

E kötet kéziratát átnézte:

DR. BÁLINT ELEMÉR

tanszékvezető docens

ELŐSZÓ E KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

A második kiadás az elsőnek majdnem változatlan utánnyomása. Az időközben tudomásomra jutott sajtóhibák és értelemzavaró elírások kijavítása mellett a kötet egy „Vegyes gyakorló feladatok" című paragrafussal bővült. Az itt szereplő feladatokat jórészt műszaki egyetemeink felvételi vizsgáinak tapasztalatai alapján állítottam össze. E feladatok nehézségi foka általában nagyobb, mint az egyes fejezetekben található rokon tárgyú példáké. A feladatok kiválasztásánál az a tapasztalat is szerepet játszott, hogy a törtek és gyökmennyiségekkel kapcsolatos átalakítások, egyszerűsítések, továbbá betűs együtthatójú egyenletek megoldása és a logaritmusokkal való bánásmód általában elég nagy gondot okoz a növendékek túlnyomó többségének. A „Vegyes gyakorló feladatok" megoldásait — eltérően a többi helyen követett gyakorlattól — az egyes feladatoknál adtam meg részben nyomdatechnikai, részben didaktikai okokból.

A tájékozott olvasó hamarosan észre fogja venni, hogy e könyvecske nem öleli fel mindazt, amit ma középiskoláinkban tanítanak. Gondolok itt például bizonyos egyszerűbb számelméleti kérdésekre, a függvényvázolásra, egyes algebrai problémákra stb. Ezek egy része az egyetemi előadásokban szerepel. Noha a teljességre való törekvés nem volt és nem is lehet cél a könyvecske írásánál, mégis idővel kívánatos volna egy olyan munka elkészítése, amely — a gyakorlati igények kielégítése mellett — magasabb szempontokat figyelembe vevő, korrekt elméleti megalapozást is nyújtana.

Kerek hat esztendő alatt e szerény kis könyvecske első kiadása teljesen elfogyott. Elsősorban egyetemi felvételre készülő fiataljaink merítettek belőle. Kívánom, hogy pedagógusaink és diákjaink e könyvecske második (javított és némileg bővített) kiadását is hasonló szeretettel fogadják, mint ezt az elsőnél tették. Váljék ez a kis munka tanuló ifjúságunk hasznára, hogy majdan tudásukat műszaki kultúránk további fejlesztésénél gyümölcsöztethessék.

Köszönettel tartozom e könyvsorozat szerkesztőjének: Fazekas Ferenc docens úrnak, aki munkámmal és annak előkészítésével kapcsolatban a legmessszebbmenő támogatásban részesített.

Budapest, 1958. július 1.

A SZERZŐ

E KÖTET HARMADIK KIADÁSÁHOZ

A harmadik kiadás a második, javított kiadás változatlan utánnyomása.

Budapest, 1960. július 15.

A SZERZŐ

TARTALOMJEGYZÉK

1. §. Számtan

a) A négy alapművelet és a racionális számok 11
b) Egész- és törtszámok írása a tízes számrendszerben 11
A négy alapművelet egész számokkal és tizedestörtekkel 11
c) A mennyiségek közötti összefüggések 12

2. §. Aritmetika

a) A műveletek és számok áttekintése 14
b) Az algebrai kifejezések áttekintése 16
α) Egytagú algebrai kifejezések 16
β) Többtagú algebrai kifejezések 16
c) Algebrai kifejezések átalakítása 17
1. Polinomok szorzatfelbontása 19
α) A közös tényezők kiemelése 19
β) Felbontás nevezetes szorzatok alapján 19
γ) Másodfokú polinomok felbontása 20
2. Többtagú kifejezések előállítása zártabb alakban 20
3. Törtekkel kapcsolatos átalakítások 22
α) Áltört felbontása polinom és valódi tört összegére 22
β) Törtek egyszerűsítése 22
γ) Törtek összevonása 23
δ) Törtek szorzása 23
ε) Reciprok-érték 23
ζ) Törtek osztása 24
η) Törtes törtek 24
4. Racionális kitevőjű hatvány értelmezése és a hatványokkal kapcsolatos átalakítások 24
α) Átalakítás $c \cdot x^{\circ}$ alakra 26
β) Negatív és tört kitevő eltávolítása 27
γ) Hatványokká való átalakítás 27
δ) A gyökjel alól való kiemelés 28
ε) A kiemelés fordítottja 28
ζ) A nevező racionalizálása 28
η) Többtagúak hatványai 29
d) A logaritmussal kapcsolatos átalakítások 29
α) Egytagú számtani kifejezések értékének meghatározása logaritmussal ... 30
β) Logaritmusok meghatározása $\log 2 = 0{,}3010$ és $\log 3 = 0{,}4771$ felhasználásával 30
γ) Számok és kifejezések felírása logaritmussal 30
δ) Logaritmikus kifejezések logaritmusmentes előállítása 30
ε) Összefüggés különböző alapú logaritmusok között 30

3. §. Elemi úton megoldható egyenletek

a) Egyismeretlenes egyenletek megoldása 32
α) Elsőfokú egyenletek 38
β) Másodfokú egyenletek 39
γ) Magasabbfokú egyenletek 40
δ) Irracionális egyenletek 41
ε) Transzcendens egyenletek 42
A) Exponenciális egyenletek 42
B) Logaritmikus egyenletek 42
C) Goniometrikus egyenletek 43
b) Egyenletrendszerek 43
α) Elsőfokú egyenletrendszerek 43
β) Magasabbfokú egyenletrendszerek 46

4. §. Egyenlőtlenségek

a) Az egyenlőtlenségek tulajdonságai 48
b) Egyismeretlenes egyenlőtlenségek 52
c) Abszolút érték 54

5. §. Geometria

a) Planimetria 56
b) Trigonometria 62
α) A derékszögű háromszög megoldása 62
β) Az általános háromszög megoldása 67
c) Stereometria 71

6. §. Goniometria

a) A szögfüggvények értelmezése és tulajdonságai 74
b) Addíciós tételek 79
c) Goniometrikus egyenletek 85

7. §. Analitikus síkgeometria

a) Két pont távolsága és a felezőpont koordinátái 88
b) Az egyenes analitikus geometriája 89
c) Kúpszeletek (másodrendű görbék) 92
1. Kör 92
2. Ellipszis 93
3. Hiperbola 94
4. Parabola 95

8. §. Vegyes gyakorló feladatok

Eredménytár

1. §. SZÁMTAN

a) A négy alapművelet és a racionális számok

A világ jelenségei és összefüggéseik közötti eligazodás törekvése hozta magával a számok és műveleteik bevezetésének szükségét.

A legegyszerűbb számok az ún. *természetes számok*.[1] Ezeket a következő módon szokás elrendezni:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

Látható, hogy a természetes számok ezen *sorozatában* van egy első és mindegyikre következik egy újabb szám. Tehát a sorozat elemei között nincs utolsó.[2]

A legegyszerűbb számtani művelet a számsorozaton való lépésszerű tovahaladás, azaz a *számlálás*. A számlálás, amennyiben nem a legkisebb természetes számból indulunk el, nemcsak a növekvő, hanem a csökkenő számok irányában is történhetik. Az *összeadás* és *kivonás* lényegében számlálás a növekvő, ill. csökkenő számok irányában. Az összeadás ismételt alkalmazása, ti. midőn az összeadandó tagok egyenlők, a *szorzás* műveletéhez vezet. A szorzás fordított művelete az *osztás*, azaz a szorzat egyik tényezőjének meghatározása, ha ismeretes a másik tényező és a szorzat értéke.

Az összeadás és szorzás műveletének fogalmából következik, hogy egész számok összege és szorzata is egész szám. Két egész szám hányadosa azonban nemcsak egész, hanem *törtszám* is lehet. Miként az osztás műveleténél az egész számok mellett fellépnek a törtszámok, úgy a kivonásnál is újabb számok lépnek fel: a *zérus* és a *negatív számok*.

b) Egész- és törtszámok írása a tízes számrendszerben A négy alapművelet egész számokkal és tizedestörtekkel

A tízes számrendszerben az egész számokat kilenc *számjegy* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) és a 0 *helypótló* segítségével írjuk le. Az első kilenc szám *egy* számjeggyel fejezhető ki. (Egyjegyű számok.) A többi szám két, három, négy, ... stb. jeggyel írható le. Így beszélünk két-, három-, négyjegyű, ... stb. számokról. Egy többjegyű számban minden számjegynek *helyi értéke* van. (Egyjegyű számoknál helyi értékről nem kell beszélni!) Jobbról balra haladva a jegyek helyi értéke: egy, tíz, száz, ezer, ... stb. A számjegy valódi értékét megkapjuk, ha a számjegyet helyi értékével megszorozzuk. A szám értéke pedig a jegyek valódi értékeinek összege.

[1] A természetes számokat *pozitív egész* számoknak is nevezik.

[2] A sorozatokkal kapcsolatos problémák (monotonitás, korlátosság, konvergencia, határérték stb.) már a felsőbb mennyiségtan területéhez tartoznak. L.: „Sorozatok. Sorok." (Műszaki matematikai gyakorlatok A. VIII.)

Így például az 52 804 ötjegyű szám a következőt jelenti:

$$52\,804 = 5 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4.$$

Felhasználva a $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$ stb. jelöléseket (10 hatványai), fenti számot így is írhatjuk:

$$5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4$$

A törtszámokat a tízes számrendszerben *tizedesvessző* (komma) segítségével írjuk; ekkor a tizedesvesszőtől jobbra haladva a számjegyek helyi értéke: tized, század, ezred, ... stb., míg balra a fent mondottak maradnak érvényben. Az így felírt törtszámokat *tizedestörteknek* nevezzük.[1] Tizedestört például 35,478.

A mindennapi élet legtöbb számtani problémája a pozitív egész és törtszámokkal, valamint a négy alapművelet segítségével megoldható.

Az összeadásnál és kivonásnál ügyeljünk arra, hogy a *megegyező helyiértékű jegyeket adjuk össze*, ill. vonjuk ki. *A szorzásnál az eredményben annyi tizedesjegyet vágunk el, mint amennyi a szorzóban és szorzandóban volt együttvéve.* Az osztásnál ügyeljünk arra, hogy amennyiben az osztó tizedestört, akkor előbb mind az osztót, mind az osztandót szorozzuk meg 10-zel, ill. 100-zal stb. (minek folytán a tizedesvessző egy, ill. kettő stb. hellyel jobbra tolódik, de a hányados értéke nem változik), hogy *az osztó egész szám legyen.*

Feladatok

Végezzük el az alábbiakban kijelölt műveleteket:

1. 10,035 + 0,12 + 143,702 + 0,033 + 0,003 + 200,007 + 2,01; **2.** 6,8 − 2,934; **3.** 4,25 · 805; **4.** 0,53 · 0,002; **5.** 2,3976 : 162; **6.** 243,5 : 2,302; **7.** 0,378 : 2,7; **8.** 0,75 tonna + 3 dkg + 10,57 kg = hány mázsa?

c) A mennyiségek közötti összefüggések

A világban végbemenő jelenségek és változások nem elszigeteltek, hanem összefüggésben vannak egymással. Az összefüggés igen gyakran *egyenes vagy fordított arányosság.* Az ilyen, ún. arányossági feladatok rendszerint *hármasszabályra* vezetnek. A hármasszabályt akár következtetéssel, akár aránypárral oldhatjuk meg. A kiszámítandó mennyiséget (ismeretlent) betűvel (rendszerint x-szel) szokás jelölni. A műszaki gyakorlatban előadódó legegyszerűbb számtani feladatok is bizonyos mennyiségek közti egyenes vagy fordított arányossággal kapcsolatosak.

[1] A törtszámok nemcsak tizedestört alakban, hanem mint *közönséges törtek* is felírhatók, egész számok és *törtvonal* segítségével. Pl. $\frac{3}{2}$. A közönséges és tizedestörtek egymásba átalakíthatók. Így

$$\frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ és } 0{,}3 = \frac{3}{10}\,; \quad 35{,}478 = 3 \cdot 10 + 5 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = 3 \cdot 10 + 5 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + 8 \cdot \frac{1}{10^3} =$$

$$= 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}.$$

Felhasználva a 0 és negatív kitevőjű hatványokat, mondhatjuk, hogy a tízes számrendszerben bármely egész vagy törtszám felírható mint 10 fogyó hatványai szerint rendezett többtagú kifejezés.

Feladatok

1. Ha egy dinamométerre (rugós erőmérő) 2,4 kg súlyt akasztunk, akkor a mutató a beosztás nulla helyzetétől 1,8 cm-rel mozdul el. Mekkora a mutatónak a nullahelyzettől való elmozdulása, ha a terhelés 7,6 kg?

2. Valamely esztergapadot hajtó motor fordulatszáma 960/perc és a motor szíjtárcsájának átmérője 60 mm. Hány mm az esztergapad hajtótárcsájának átmérője, ha az esztergapad főorsója percenként 180-at fordul?

3. 32 kg kén elégetésekor 64 g kéndioxid keletkezik. Hány g kéndioxid keletkezik, ha 1 kg ként égetünk el?

4. Milyen magas az az aknatorony, amely tőlünk 17 és fél méter távolságra van és amelyet éppen eltakar egy tőlünk 5 m 25 cm távolságra levő másfél méter hosszúságú függőleges mérőléc?

5. A keserűsó ($MgSO_4 \cdot 7\,H_2O$) molekulasúlya 246,38; ebből a magnéziumra (Mg) esik 24,32. Mennyi Mg-ot tartalmaz 3 kg keserűsó?

6. Mennyi rezet tartalmaz 10 kg rézgálic? (Összetétele: $CuSO_4 \cdot 5\,H_2O$. Atomsúlyok: Cu = 63,57; S = 32,07; O = 16; H = 1.)

7. Mekkorák a háromszög szögei, ha úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 3 : 4?

8. Kétfajta pamutfonalat cérnázunk össze. A cérna súlyának 48 kg-nak kell lennie. A fonalak súlyaránya 1 : 3. Mennyit kell vennünk a kétfajta fonálból?

9. Betonkeverésnél a felhasznált cement, homok és kavics térfogatának aránya 1 : 2 : 5. Hány m^3 veendő az egyes anyagokból 684 m^3 betonhoz?

10. Valamely csapágyfém összetétele 14 súlyrész ón, 3 súlyrész antimon, 1 súlyrész réz. Hány kg szükséges az egyes anyagokból egy 270 kg-os öntvényhez?

11. 315 g sóból három oldatot készítünk. Az oldatok töménysége úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3 : 4. Hány g sót tartalmaznak az egyes oldatok?

12. Mennyi 650 Ft-nak 5%-a?

13. 538 csavarból selejt 8 csavar. Hány % a selejt?

14. A világos sör szesztartalma 2%. Hány l sörben van 0,6 l szesz?

15. Valamely öntödében a leöntött darabok közül 48 db a selejt, ami a kész öntvénynek 2,4%-a. Hány öntvény készült összesen?

16. Egy ötvözetben 40% cink és 60% ólom van. Mennyi ilyen ötvözetet készíthetünk 12 kg cink felhasználásával?

17. Valamely csapágyfém 80% ónt, 12% antimont és 8% vörösrezet tartalmaz. Hány kg-ot kell mindegyik fémből beszerezni, ha 50 kg csapágyfémet akarunk előállítani?

18. 13 kg vízben 650 g sót oldottunk. Hány %-os oldatot nyertünk?

19. Összekeverünk 35 l 56%-os és 47 l 78%-os alkoholt. Hány százalékos lesz összekeverés után és hány l vizet kell hozzáadni a keverékhez, hogy 62%-os legyen?

2. §. ARITMETIKA

Eddig olyan feladatokat láttunk, amelyeknél csak pozitív egész és törtszámok (tizedestörtek) és a négy számtani alapművelet fordult elő. A műszaki élet problémái azonban szükségessé teszik e matematikai apparátus kiszélesítését. Nevezetesen: egyrészt újabb műveletek és ezzel kapcsolatban újabb számok bevezetését, másrészt a betűszámtan kiépítését. A kiszámítandó vagy utólag megadandó mennyiségeket *betűkkel* jelöljük. Tehát a betűk számokat jelentenek. Ha számokat, ill. betűket műveleti jelekkel kapcsolunk össze, számtani, ill. *algebrai kifejezéseket* nyerünk. Az aritmetika algebrai kifejezések *átalakításaival* vagy mint mondani szokás: algebrai kifejezésekkel való műveletekkel foglalkozik, feltéve, hogy az elvégzendő vagy jelölt műveletek száma véges.

a) A műveletek és a számok áttekintése

Direkt műveletek	összeadás	szorzás	hatványozás	
Indirekt műveletek	kivonás	osztás	gyökvonás	logaritmálás

A táblázatban egymás alatt álló műveletek egymásnak fordítottjai, ami a következőket jelenti:

1. $(a + x) - x = a$ és $(a - x) + x = a$

2. $a \cdot x : x \quad a$ és $\frac{a}{x} \cdot x = a \quad (x \neq 0)$

3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ de $\sqrt[n]{a^n} = a$ (és még további $n - 1$ érték)[1]

4. $^a\log a^k = k \qquad a\,^a\log^b = b \quad$ (ha $b > 0$)

A táblázatban balról jobbra haladva mindig magasabbfokú műveleteket találunk. Így a szorzás eggyel magasabbfokú művelet, mint az összeadás; a hatványozás pedig a szorzásnál eggyel magasabb fokú stb.

Az összeadás és szorzás *kommutatív* műveletek. Ez azt jelenti, hogy sem az összeg, sem a szorzat értéke nem változik, ha tagjait, ill. tényezőit felcseréljük.[2]

Az összeadás és szorzás *asszociatív* műveletek. Ez azt jelenti, hogy egy több tagból álló összeg tagjai, valamint egy több tényezőből álló szorzat tényezői tetszés szerint csoportosíthatók, anélkül, hogy az összeg, ill. szorzat értéke változnék.[3]

Végül az összeadás és szorzás műveletére érvényes az ún. *disztributív* törvény, mely szerint $(a + b)\,x = ax + bx$, azaz: összeget úgy szorzunk egy számmal, hogy minden tagját a számmal megszorozva, a nyert szorzatokat összeadjuk.

A direkt műveletek egy adott számkörben (pl. a természetes számok körében) mindig elvégezhetők.[4] Az indirekt műveleteknél ez nem mindig lehetséges. Így a kivonás művelete szükségessé teszi a *zérus* és *negatív* számok bevezetését, ha a kivonandó egyenlő, vagy nagyobb a kisebbítendőnél; az osztás a *törtszámok*[5] bevezetését, ha az osztandó nem többszöröse az osztónak, és a gyökvonás az *irracionális* és *képzetes* (imaginárius) számok bevezetését, ha a gyökjel alatt nem teljes hatvány, avagy pároskitevőjű

[1] a-t az $\sqrt[n]{a^n}$ gyök főértékének nevezzük. Így pl. $\sqrt{4}$ főértéke 2.

[2] Vannak ún. nem-kommutatív algebrák, mint amilyén részben pl. a vektoralgebra; itt pl. a vektorális szorzás nem-kommutatív művelet.

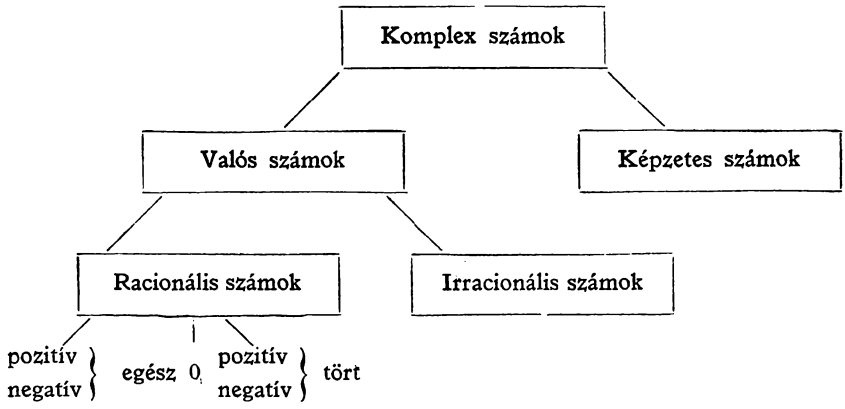
[3] Meg kell jegyezni, hogy a nem-kommutatív algebrákban a szorzás asszociativitása sem érvényes, továbbá, hogy az összeadás ezen tulajdonsága nem végesszámú tagból álló összegekre (sorok) általában nem érvényes. L.: az ún. feltételesen konvergens sorokat. (A. VIII.)

[4] Ez azt jelenti, hogy pl. két természetes szám összege és szorzata is természetes szám.

[5] A pozitív és negatív egész és törtszámokat és a zérust közös néven r a c i o n á l i s számoknak nevezzük.

Ha a tört értéke 1-nél nagyobb $\left(\frac{3}{2}\,;\ 1{,}5\right)$ *áltört*, ha 1-nél kisebb $\left(\frac{1}{2}\,;\ 0{,}5\right)$ *valódi* tört a neve.

gyökjel alatt negatív szám áll. A racionális és irracionális számok alkotják a *valós* számok összességét. A valós és képzetes számok összegét *komplex* számoknak nevezzük.[1]



Kimutatható, hogy

1. bármely racionális szám felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol a p és q egész számok legnagyobb közös osztója 1 (azaz relatív prímszámok),

2. bármely racionális szám felírható végtelen szakaszos tizedestört alakjában,

3. bármely irracionális szám tetszés szerinti pontossággal megközelíthető racionális számokkal,

4. bármely képzetes szám felírható egy valós szám és a képzetes egység ($i = \sqrt{-1}$) szorzataként,

5. bármely komplex szám felírható egy valós szám és egy képzetes szám algebrai összegeként (l. részletesen: B. IV. alatt).

6. az itt felsorolt számok és csakis ezek lehetnek algebrai egyenletek gyökei (algebrai számok),

7. a logaritmálás útján nyert számok általában nem lehetnek algebrai egyenletnek gyökei (transzcendens számok), amiért is a logaritmálás nem algebrai, hanem transzcendens művelet,

8. a körív hosszának meghatározásánál fellépő $\pi = 3{,}14159\ldots$ szám, és az ún. természetes logaritmusrendszer alapszáma $e = 2{,}718\ldots$ szintén transzcendens számok,

9. a transzcendens számok, noha algebrai egyenletnek nem gyökei, tetszés szerinti pontossággal megközelíthetők racionális számokkal.

Feladatok

Végezzük el az alábbiakban kijelölt műveleteket:

1. $(-5) + (-3)$
2. $(-5) - (-12)$
3. $(-2{,}5) \cdot (-10)$
4. $(-4{,}2) \cdot 3$
5. $(-5) : (-2{,}5)$
6. $\frac{8}{-3{,}2}$

[1] A komplex számok magukban foglalják a valós és képzetes számokat. A komplex számok *valós számpárok* segítségével értelmezhetők.

7. 101^2 8. $(-0{,}7)^2$ 9. $0{,}00108^2$

10. $\sqrt{2}$ 11. $\sqrt{3}$ 12. $\sqrt{64\ 211{,}56}$

13. $\sqrt{13{,}2}$ 14 $\sqrt{0{,}52}$ 15. $\sqrt{0{,}034}$

16. $\sqrt{0{,}001}$ 17. $\sqrt{-64}$ 18. $\sqrt{-1{,}21}$

19. $\sqrt{-0{,}18}$ 10. $-4i + 7i + 3i$ 21. $(-5i)(-3i)$

22. $\dfrac{-18i}{5i}$ 23. $(-3i)^2$ 24. $(2i)^3$

25. $i^0, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, \ldots$

26. $i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3},$

27. $(3 + 4i) + (3 - 4i)$ 28. $(3 + 4i)(3 - 4i)$

29. Igazoljuk, hogy az $a + bi$ és $a - bi$ konjugált komplex számok összege: $2a$ és szorzata: $a^2 + b^2$, tehát valós számok.

b) Az algebrai kifejezések áttekintése

Az algebrai kifejezéseket két csoportba szokás osztani:

α) Egytagú algebrai kifejezések

1. szorzat: $a \cdot b$
2. tört: $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$
3. hatvány: a^n (n 1-nél nagyobb egész szám)
4. gyök: $\sqrt[n]{a}$ (n 1-nél nagyobb egész szám)

β) Többtagú algebrai kifejezések

Ilyet nyerünk, ha végesszámú[1] egytagú algebrai kifejezést kapcsolunk egymáshoz + és − jelekkel.

Az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

többtagú kifejezést, ahol n természetes szám, $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ tetszőleges (valós) számok és $a_n \neq 0$, x-ben n-ed fokú (inhomogén) *polinomnak* nevezzük, amely x fogyó hatványai szerint van rendezve és tagjainak száma legfeljebb $n + 1$.

Az

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y + a_{n-2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \ldots + a_1 xy^{n-1} + a_0 y^n$$

többtagú kifejezést x-ben és y-ban n-edfokú *homogén polinomnak* nevezzük, amely x fogyó és y növekvő hatványai szerint van rendezve és tagjainak száma legfeljebb $n + 1$; a kitevők összege minden tagban n.

[1] Amennyiben a tagok száma nem véges, a nyert kifejezés nem tekinthető eleminek, s neve: sor. A sorokkal kapcsolatos vizsgálatok a felsőbb mennyiségtan tárgyköréhez tartoznak. (L.: az A. VIII. kötetet!)

Az

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + nd)$$

többtagú kifejezést *számtani haladványnak* nevezzük, ahol d, a számtani haladvány különbsége, zérustól különböző szám, és a tagok száma n vagy $n + 1$, aszerint, hogy $a = 0$, vagy $a \neq 0$.

Az

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$

többtagú kifejezést *mértani haladványnak* nevezzük, ahol $q \neq 1$ és $a \neq 0$, tehát a tagok száma $n + 1$. q-t a mértani haladvány hányadosának nevezzük.

Feladatok

Az alábbi kifejezésekről állapítsuk meg, hogy egy- vagy többtagúak-e és diszkutáljuk azokat részleteiben is, például a következő módon: az $\frac{1 - x + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ kifejezés egytagú, mert tört. Számlálója másodfokú polinom, de ugyanakkor egy háromtagú mértani haladvány is, melynek hányadosa $-x$ és első tagja 1. A nevező egytagú kifejezés, mégpedig gyök. A gyökjel alatt másodfokú homogén polinom áll.

1. $2a$ 2. $3x^2y$ 3. $\frac{9x^3}{16y}$ 4. $\left(\frac{x}{y}\right)^2$

5. $(x - y)^3$ 6. $\sqrt{\frac{a}{2x} + \frac{1}{3}}$ 7. $\sqrt{a^2 - b^2}$ 8. $\sqrt[3]{x^2y}$

9. $\frac{1}{\sqrt{a - x}}$ 10. $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ 11. $(a - b)(a + b)$ 12. $\frac{x^2 + y^2}{xy}$

13. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 14. $a^2 - b^2$ 15. $x\sqrt{x - \frac{1}{y}}$ 16. $x^2 - \frac{1}{x} + 2$

17. $x^2 + xy + y^2$ 18. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 19. $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{5}{3}x + 1$ 20. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2$

21. $1 - x - 2x - 3x$ 22. $1 + x + x^2 + x^3$ 23. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

c) Algebrai kifejezések átalakítása

Az algebrai kifejezések átalakítása rendszerint azt jelenti, hogy az adott kifejezéssel egymás után két olyan műveletet végzünk, ill. jelölünk, amely egymásnak megfordítottja. Mivel az algebrai kifejezésben szereplő betűk számokat jelentenek, magának az algebrai kifejezésnek a betűk egy adott választása mellett meghatározott számértéke van. Ez nyilván nem változik, ha például egy másik számmal szorozzuk és ugyanazzal osztjuk is; ugyanis akkor az adott kifejezést 1-gyel szoroztuk, miáltal a kifejezés értéke nem változott. Az így adódó egyenlőségeket *azonosságnak* nevezzük.[1] Lássunk néhány példát ilyenfajta átalakításra:

[1] Azonosság alatt olyan egyenlőséget értünk, mely a benne előforduló betűk bármely értéke mellett tennáll, feltéve, hogy az egyenlőség bal- és jobboldali helyettesítési értékeinek értelme van.

1. Az $x^2 - 2x$ többtagú kifejezést átalakíthatjuk szorzattá, ha előbb x-szel osztjuk, majd az eredményt x-szel szorozzuk, de a szorzást csak jelöljük.

$$x^2 - 2x = \frac{x^2 - 2x}{x} \cdot x = \left(\frac{x^2}{x} - \frac{2x}{x}\right) x = (x - 2)\, x.$$

(Az eljárás neve: a *közös tényező kiemelése.*) Vagy azt is mondhattuk volna: az adott kifejezést szorozzuk meg $\frac{x}{x}$-szel, azaz 1-gyel;

$$\text{így } (x^2 - 2x)\frac{x}{x} = \frac{x^2 - 2x}{x} \cdot x = (x - 2)\, x$$

2. $(a^2 + b^2)$-et alakítsuk át szorzattá. Evégből szorzunk is, meg osztunk is a^2-tel (azaz a kifejezést szoroztuk 1-gyel).

Tehát

$$a^2 + b^2 = a^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

3. Az $\dfrac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}$ törtet hozzuk olyan alakra, hogy abban csak *egy* törtvonal forduljon elő. Evégből a törtet $\frac{a}{a} = 1$-gyel, azaz mind a számlálót, mind a nevezőt a-val szorozzuk. Tehát

$$\frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} \cdot \frac{a}{a} = \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) a}{\left(1 + \frac{1}{a}\right) a} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

4. Az $x^2 - y^2$ kifejezést szorzattá alakíthatjuk át, ha előbb $-xy + xy = 0$-át hozzáadunk. Ekkor $x^2 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2 = x(x - y) + y(x - y) = (x - y)\,(x + y)$. (Ez a jól ismert *nevezetes szorzat* két szám négyzetkülönbségének szorzatfelbontása.)

5. Az $\dfrac{x^2}{x - 1}$ törtet felírhatjuk egy racionális egész és egy racionális valódi törtkifejezés (ahol a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező) összegeként, ha a számlálót $-1 + 1 = 0$-val *kiegészítjük.* Ekkor

$$\frac{x^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$$

6. Az $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tört $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$-gyel való szorzással racionális nevezőjű törtté alakítható:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

7. Ha x és a pozitív számok, és $a \neq 1$, akkor x felírható a alapú hatványként: $x = a^{\log_a x}$ (mert a hatványozás és logaritmálás egymásnak fordított művelete).

A felsorolt példák távolról sem merítik ki a lehetséges tipikus eseteket! E fejezetben csak a fontosabb eseteket foglaljuk össze!

Az átalakítások helyességéről meggyőződhetünk, ha a betűknek konkrét számértékeket adunk. Az egyenlőségi jel mindkét oldalán álló kifejezés helyettesítési értékének egyenlőnek kell lennie.

Ellenőrizzük például az 5. példában közölt azonosságot:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Évégből legyen pl. $x = 2$. Akkor a bal oldal értéke $\frac{2^2}{2-1} = 4$, a jobb oldal értéke $2 + 1 + \frac{1}{2-1} = 4$. Avagy legyen $x = 3$, akkor a bal oldal értéke $\frac{9}{2}$, a jobb oldalé $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; tehát az azonosság valóban helyes.

c) 1. *Polinomok szorzatfelbontása*

A feladat abban áll, hogy a polinomokat elsőfokú valós polinomok szorzatára bontsuk. Ez elvileg sem mindig lehetséges. Így például az $x^2 + b^2$ alakú másodfokú kifejezést nem lehet valós elsőfokú polinomok szorzataként felírni. Másrészt viszont az ilyen feladatok megoldása általában súlyos nehézségekbe ütközik, mert magasabbfokú algebrai egyenlet megoldását igényli. Nem könnyű megállapítani például, hogy $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ harmadfokú polinom szorzatalakja: $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$; viszont az utóbbiról már egyszerűen igazolható (a jelölt műveletek elvégzésével), hogy azonos a megadott polinommal.

Bizonyos esetekben azonban a felbontás könnyűszerrel elvégezhető! Lássuk a legegyszerűbb ilyen eseteket!

α) A közös tényező kiemelése

1. $3x^2 - x$
2. $x^3 + x$
3. $x^5 - x^4$
4. $3x^5 + 2x^3$
5. $ax^2 + bx$
6. $9ax^2 + 6a^2x - 3ax$
7. $ax - bx + ay - by$
8. $x^3 + x^2y + x^2 \times xy$
9. $3x^3 + 4xy + xy^2 + 6x^2 + 8y + 2y^2$

β) Felbontás nevezetes szorzatok alapján

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

1. $x^2 - 1$ 2. $4a^2 - 9b^2$ 3. $9x^2 - 1$

4. $x^4 - y^4$ 5. $9(a + b)^2 - 4c^2$ 6. $x^3 - 1$

7. $8x^3 - 1$ 8. $n^3 + 1$ 9. $x^3 - x$

10. $x^4 - x^2$ 11. $x^5 - x^3$ 12. $x^3 - x^2 + x - 1$

γ) Másodfokú polinomok felbontása

Az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom mindig felbontható (valós) elsőfokú tényezők szorzatára, ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek valós gyökei vannak. Ha az egyenlet gyökeit x_1 és x_2-vel jelöljük, akkor a keresett felbontás (gyöktényezős alak) $a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$. (Lásd később a 31. oldalon, 3. §. a. II. alatt.)

Példa: Bontsuk fel elsőfokú tényezőkre az $x^2 - 7x + 12$ polinomot. Mivel az $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 3$ és $x_2 = 4$, azért a keresett felbontás $(x - 3) \cdot (x - 4)$.

Az ismertetett eljárás segítségével bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

1. $x^2 - 5x + 6$ 2. $x^3 - 3x + 2$ 3. $2x^2 - x - 1$

4. $12x^2 + 5x - 3$ 5. $x^2 - 2x + 1$ 6. $x^3 - 6x^2 + 5x$

7. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ 8. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

c) 2. Többtagú kifejezések előállítása zártabb alakban

Ha egy többtagú kifejezés tagjait bizonyos szabály szerint lehet képezni, akkor alkalmasint sikerül egy ilyen, például n tagból álló kifejezést egyszerűbb és rövidebb, tehát zártabb alakban is előállítani. Ezek az átalakítások fontos szerepet játszanak a felsőbb mennyiségtanban, például a sorok elméletében, a határozott integrál fogalmával kapcsolatosan stb. (Lásd az A. V. és A. VIII. kötetet.)

Bizonyítsuk be az alábbi összefüggések helyességét:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (számtani haladvány)

2. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k + 1)$ (számtani haladvány)

3. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ (számtani haladvány)

4. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (2k - 1) = k$

5. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ (mértani haladvány)

6. $a^n + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

(Levezethető 5.-ből, ha $x = \frac{a}{b}$ helyettesítést alkalmazunk.)

7. $a^n - a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 - a^{n-3} \cdot b^3 + \ldots + b^n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a + b}$

ahol n páros szám.
(Levezethető 6.-ból, ha b helyébe $-b$-t írunk!)

8. $a^n - a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 - + \ldots - b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a + b}$,

ahol n páratlan szám.
(Levezethető 6.-ból, ha b helyébe $-b$-t írunk!)

9. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Igazolás: Mivel $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ezért
$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1$$
$$\vdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3n + 1$$

és az egyenlőségeket összeadva, a bal oldalon mindössze n^3 marad:

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2] - 3\underbrace{(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n$$

és a szögletes zárójelben álló kifejezés ebből az összefüggésből kifejezhető.

10. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 - \frac{1}{n}$

Igazolás: A bal oldal írható:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

alakban, ahol az első és utolsó tag kivételével minden tag kiesik.

Irjuk fel zártabb alakban a következő kifejezéseket:

11. $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (1 + 3n)$

12. $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2k}$

13. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$

14. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

15. $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n}$

c) 3. *Törtekkel kapcsolatos átalakítások*

Értelmezések:

1. Ha egy törtnek mind a számlálója, mind a nevezője racionális egész kifejezés, azaz polinom, akkor a törtet *racionális törtkifejezésnek* nevezzük.

2. Ha a racionális törtkifejezés nevezőjének fokszáma nagyobb, mint a számlálóé, a kifejezés neve: *valódi tört*. Ha a számláló fokszáma egyenlő a nevező fokszámával, vagy annál nagyobb, a törtkifejezést *áltörtnek* nevezzük.

α) Az alábbi áltörtkifejezéseket írjuk fel egy polinom és egy valódi tört összege gyanánt! (A számlálót osztjuk a nevezővel!)

1. $\frac{4x^3 - 7x + 2}{2x + 1}$ 2. $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$ 3. $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

4. $\frac{x}{x - 1}$ 5. $\frac{x + 1}{x - 1}$ 6. $\frac{x^2}{x^2 + 5}$

7. $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 1}$ 8. $\frac{x}{2x - 1}$ 9. $\frac{3x + 2}{2x + 3}$

10. $\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$

A 4—10. feladatoknál a számlálónak alkalmas tagokkal való kiegészítésével is eljuthatunk a kívánt alakra. Például:

$$\frac{x}{x - 1} = \frac{x - 1 + 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = 1 + \frac{1}{x - 1}$$

Másik példa:

$$\frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1 + 1}{2x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2x - 1}{2x - 1} + \frac{1}{2x - 1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2x - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x - 1}$$

(Az itt ismertetett eljárás alkalmazást nyer az integrálszámításnál!)

β) Egyszerűsítsük a következő törteket! (Évégből előbb mind a számlálót, mind a nevezőt szorzattá kell átalakítani!)

1. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$ 2. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$ 3. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2}$

4. $\dfrac{a^2 + 6ab + 9b^2}{2a^2 + 6ab}$ 5. $\dfrac{3ab - 6a}{4b^2 - 8b}$ 6. $\dfrac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1}$

7. $\dfrac{a - 2}{a^2 - 5a + 6}$ 8. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

γ) Vonjuk össze az alábbi törteket! (Előbb meghatározandó a közös nevező!)

1. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 1}$ 2. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x - 3}$

3. $\dfrac{1}{3x - 15} + \dfrac{3}{4x - 20}$ 4. $\dfrac{x}{ax - a^2} - \dfrac{a}{x^2 - ax}$

5. $1 - \dfrac{a - 2b}{a + 2b}$ 6. $\dfrac{a}{a^2 - b^2} + \dfrac{1}{a + b}$

7. $\dfrac{a}{a^2 + 2ab + b^2} - \dfrac{a}{a^2 - b^2} + \dfrac{1}{a + b}$

8. $\dfrac{a + 6b}{a^2 + 3ab} - \dfrac{9b - a}{2ab - 6b^2} - \dfrac{1}{2b}$

9. $\dfrac{a + 1}{a^2 - a} - \dfrac{a - 1}{a^2 + a} + \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{a^2 - 1}$

A törtek összevonásával ellentétes irányú művelet valamely valódi törtkifejezésnek ún. *részlettörtek összegére való felbontása.*

Így például az $\dfrac{1}{x - x^2}$, vagyis az $\dfrac{1}{x(1 - x)}$ törtet (az előbb bemutatott fogással) felbonthatjuk két olyan törtnek összegére, melyek nevezői elsőfokú kifejezések:

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{x(1 - x)} = \frac{1 - x + x}{x(1 - x)} = \frac{1 - x}{x(1 - x)} + \frac{x}{x(1 - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}$$

A részlettörtekre bontás szokásos eljárását később részletezzük! (Lásd: A. IV. alatt.)

δ) Végezzük el a jelölt szorzásokat!

1. $\dfrac{2 - x}{1 + a} \cdot \dfrac{2 + x}{1 - a}$ 2. $\left(\dfrac{a}{5} - b\right)\dfrac{ab}{2}$ 3. $\left(\dfrac{c}{3} + 2\right)\left(\dfrac{3c}{4} - 6\right)$

4. $\left(\dfrac{6a^3}{5x} - \dfrac{3a^2}{10x^2} + \dfrac{9a}{5x^3}\right) \cdot \dfrac{5x^2}{6a^2}$

ε) Írjuk fel az alábbi kifejezések reciprok értékét!

1. a 2. $\dfrac{2}{3a}$ 3. $\dfrac{1}{a - 1}$

4. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ 5. $1 + \dfrac{a}{b}$ 6. $\dfrac{x - y}{2} + 1$

ζ) Végezzük el a jelölt osztásokat!

1. $\frac{15a^2b^5}{2xy^2} : (-5ab^3)$

2. $\left(\frac{9x^7}{16y^2} - \frac{15x^6}{8y^3}\right) : 3x^2y^2$

3. $\frac{4m^3n}{9p} : (2m^3p - 2m^2p)$

4. $3ab^4 : \frac{9a^3}{5b}$

5. $(9x^4y^4 - 3x^3y^3 - 6x^2y^2) : \frac{9xy}{8z}$

6. $\left(\frac{7x^2}{5a^6} + \frac{28x^5}{15a^3}\right) : \frac{7x^2}{5a^2}$

7. $\frac{2x+3}{2x^2-5} : \frac{4x-3}{2x^2+3}$

8. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^3+b^3} : \frac{1}{a^2-b^2}$

9. $\left(\frac{x^2}{6} + 2x + 6\right) : \left(\frac{x}{2} + 3\right)$

10. $\left[\frac{4}{3x} - \frac{1}{x-1}\right] : \left[1 - \frac{3(x-2)}{2(x-1)}\right]$

η) Az alábbi kifejezéseket írjuk a lehető legegyszerűbb alakba!

(Ezek a feladatok lényegében azonosak az előbbiekkel, csak éppen az osztás jele törtvonallal van írva!)

1. $\dfrac{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{3}{y}}$

2. $\dfrac{\frac{3}{4}a^2 - \frac{4}{3}b^2}{3a - 4b}$

3. $\dfrac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}}$

4. $\dfrac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{\frac{a+1}{a-1} + 1}$

5. $\dfrac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}}$

6. $\dfrac{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$

7. $1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$ (Lánctört)

c) 4. *A racionális kitevőjű hatvány értelmezése és a hatványokkal kapcsolatos átalakítások*

Jelentsen a tetszőleges valós számot és n 1-nél nagyobb egész számot. Akkor

$$\boxed{a^n = a \cdot a \ldots a} ;$$

$$\boxed{a^1 = a} ; \quad \boxed{a^0 = 1} ; \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} ; \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Ha α és β tetszőleges racionális szám és a valós, akkor

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}\,; \qquad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha+\beta}\,;$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}\,; \qquad \sqrt[\beta]{a^\alpha} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

tehát a kitevőkkel eggyel alacsonyabb fokú műveletet végzünk!
Továbbá

$$(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Kéttagúak hatványai:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

A nyert kifejezések homogén polinomok (az egy sorban álló tagok kitevőinek összege állandó), melyek a-nak fogyó és így b-nek növekvő hatványai szerint vannak rendezve Az együtthatók alábbi táblázatából (Pascal-háromszög):

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
.....
.....

azok képzési szabálya könnyen leolvasható. Szokás az együtthatókat a következő módon jelölni *(binomiális együtthatók)*:

$\binom{n}{0}$; olv.: n alatta null; jelentése: 1

$\binom{n}{1}$; olv.: n alatta 1; jelentése: $\dfrac{n}{1} = n$

$\binom{n}{2}$; olv.: n alatta 2; jelentése: $\dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$\binom{n}{3}$; olv.: n alatta 3; jelentése: $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$\binom{n}{4}$; olv.: n alatta 4; jelentése: $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$\vdots$

$\binom{n}{n}$; olv.: n alatta n; jelentése: $\dfrac{n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n} = 1$

Így:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

(Newton-féle binomiális tétel.)

Többtagúak négyzete:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Feladatok

a) A következő kifejezéseket írjuk fel egy konstans és egy racionális kitevőjű hatvány szorzataként, tehát $c \cdot x^a$ alakban. (Ezek az átalakítások a differenciál- és integrálszámítás technikájában igen gyakoriak.)

(L.: a hatványfüggvény differenciálásánál és integrálásánál A. III. és A. IV. alatt.)

1. $\dfrac{1}{x^2}$ 2. $\dfrac{2}{x^3}$ 3. $-\dfrac{a}{x^n}$ 4. $\dfrac{k}{x^{-k}}$

5. $\sqrt{x}$ 6. $\sqrt[3]{x}$ 7. $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 8. $\dfrac{3\sqrt[4]{x^3}}{5}$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 10. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ 11. $\dfrac{-3}{\sqrt[4]{x^3}}$ 12. $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

13. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$ 14. $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2}$ 15. $3x\sqrt{x}$ 16. $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{x}}$

17. $\dfrac{3\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x^2}}$ 18. $(\sqrt{x})^3$ 19. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ 20. $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

21. $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ 22. $\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\right)^6$

β) A következő kifejezéseket alakítsuk át úgy, hogy azokban sem negatív, sem törtkitevő, sem törtes tört ne szerepeljen!

1. x^{-2} 2. x^{-3} 3. $\dfrac{1}{a^{-2} - a^{-3}}$ 4. $\dfrac{x^{-1} - x^{-2}}{x^{-3} + x^{-4}}$

5. $\dfrac{2x^{-2}}{3x^{-3}}$ 6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$ 7. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ 8. $x^{\frac{1}{2}}$

9. $-2x^{\frac{2}{3}}$ 10. $\dfrac{5}{4}(x-y)^{\frac{1}{4}}$ 11. $\dfrac{1}{2\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$ 12. $x^{-\frac{1}{2}}$

13. $-2x^{-\frac{3}{4}}$ 14. $-\sqrt[\frac{1}{3}]{16}$ 15. $(\frac{1}{2})^{-2}$ 16. $9^{\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)}$

17. $(9^4)^{-\frac{1}{2}}$ 18. $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

γ) A következő kifejezéseket alakítsuk át hatványokká:

pl.:

$$a^2b^2 = (ab)^2;$$

vagy

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab};$$

vagy

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (-a-b)^2$$

1. $2^3 \cdot x^3$ 2. $(a-b)^2 \cdot c^2$ 3. $2^n(1-x^2)^n$

4. $\dfrac{5^2}{a^2}$ 5. $\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ 6. $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$

7. $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b}$ 8. $\sqrt{\sqrt{a}+b} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-b}$

9. $\sqrt{\sqrt{41}+4} \cdot \sqrt{\sqrt{41}-4}$

10. $\sqrt{7-2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}$ 11. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$

12. $x^2 + 2x + 1$ 13. $x^2 - 2x + 1$ 14. $x^2 - 6x + 9$

15. $4x^2 + 4x + 1$ 16. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ 17. $2x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 1$

δ) Emeljük ki a gyökjel elé a racionális tényezőt!

[Pl.: $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.]

1. $\sqrt{12}$ 2. $\sqrt{18}$ 3. $\sqrt{300}$ 4. $\sqrt{75}$

5. $\sqrt{\frac{98}{121}}$ 6. $\sqrt{8a^3b^4c^5}$ 7. $\sqrt{\frac{36a^6}{75x^3y^5}}$ 8. $\sqrt{a^3 - a^2}$

9. $\sqrt{x^3 + 2x^2 + x}$ 10. $\sqrt{(a+b)(a^2 - b^2)}$

11. $x\sqrt{x^6 - x^5}$

ε) A gyökkifejezés előtt álló tényezőt vigyük a gyökjel alá!

[Pl.: $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$]

1. $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ 2. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{3}}$ 3. $a\sqrt{a}$

4. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 5. $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^6 - x^5}$ 6. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2 - b^2}$

ζ) Változtassuk racionálissá a nevezőt!

Pl.:

$$\frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{a\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{a\sqrt{x}}{x};$$

vagy

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

1. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 2. $\frac{a}{\sqrt{a}\sqrt{a}}$ 3. $\frac{x}{x - \sqrt{x}}$ 4. $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 6. $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 8. $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

9. $\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ 10. $\frac{\sqrt{8}}{3 - 2\sqrt{3}}$ 11. $\frac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{8}}$ 12. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

13. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ 14. $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

η) Végezzük el a jelölt műveleteket! (A gyökök helyett általában célszerű törtkitevőjű hatványokkal dolgozni és csak az eredményben visszatérni a gyökjeles írásra!)

1. $(1 - x)^2$ 2. $(5x^2y^3 - 6x^3y)^2$ 3. $(2 - 3n + 4n^2)^2$

4. $(x + 1)^3$ 5. $(ax - by^2)^3$ 6. $(1 - \sqrt{2})^2$

7. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ 8. $(3\sqrt{15} - 2\sqrt{6})^2$ 9. $\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[3]{a}\right)^2$

10. $\left(x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right)^2$ 11. $\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9}\right)$

12. $\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}\right)^3$

d) A logaritmussal kapcsolatos átalakítások

$^a\log b$ (olv.: a alapú logaritmus b) jelenti az $a^x = b$ egyenletben szereplő x kitevőt! Tehát $a^{^a\log b} = b$. Ebben a kapcsolatban a és b pozitív számokat jelentenek és $a \neq 1$. (Negatív számok logaritmusait csak a komplex számok segítségével lehet értelmezni!)

Mivel egyrészt a logaritmus kitevőt jelent, másrészt (egyenlő alapú) hatványok szorzása, osztása, hatványozása és gyökvonása úgy történik, hogy a kitevőket összeadjuk, kivonjuk, szorozzuk, ill. osztjuk, ezért a logaritmus ún. *addíciós* tételei szinte közvetlenül beláthatók. Nevezetesen, ha $u > 0$ és $v > 0$

$$^a\log u \cdot v = {}^a\log u + {}^a\log v$$

$$^a\log \frac{u}{v} = {}^a\log u - {}^a\log v$$

$$^a\log u^k = k \cdot {}^a\log u$$

$$^a\log \sqrt[k]{u} = \frac{^a\log u}{k}$$

A gyakorlati életben a számoknak 10-es alapú logaritmusait használják s azokat táblázatosan állítják össze. (Logaritmus-tábla készítése felsőbb mennyiségtani módszerekkel (sorbafejtés) történik. (Lásd A. VIII.)

Jelölésük az alap kiírása nélkül, pusztán a log szócskával történik. Tehát $^{10}\log 2$ helyett csak log 2-t írunk. (Egyes tankönyvekben lg, sőt l jelölésekkel is találkozunk. Tehát például log 2 helyett lg 2 vagy l 2-t írnak!)

Logaritmus-tábla birtokában és felhasználva az addíciós tételeket, a szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás műveletei egyszerűbben végezhetők el, vagy éppenséggel lehetővé teszik egy-egy bonyolultabb hatvány értékének meghatározását. Így például a $2^{1,57}$ hatvány értékét logaritmus nélkül ki sem tudnók számítani.

Míg a gyakorlati számításoknál elsősorban a 10-es alapú, addig a felsőbb mennyiségtani vizsgálatoknál az e-alapú ($e = 2{,}718\ldots$), vagyis az ún. *természetes logaritmusok*nak („logaritmus naturalis"; jelölése ln szócskával) van döntő szerepe.

Feladatok

a) Logaritmus segítségével határozzuk meg a következő számtani kifejezések értékét:

1. $\sqrt[3]{0{,}032}$ 2. $\dfrac{\pi^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}513}}{13{,}04}$ 3. $\sqrt{2}\log\sqrt{2}$

4. $5\sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt{11\sqrt{13}}}}$ 5. $\dfrac{5^{\sqrt{2}} - 3^{\sqrt{3}}}{21{,}532}$

β) Logaritmus-tábla nélkül határozzuk meg az alábbi logaritmusokat, ha $\log 2 = 0{,}3010$ és $\log 3 = 0{,}4771$:

1. $\log 4$ 2. $\log 5$ 3. $\log 6$ 4. $\log 8$ 5. $\log 9$

6. $\log 12$ 7. $\log 15$ 8. $\log 16$ 9. $\log 18$ 10. $\log 72$

11. $\log 0{,}5$ 12. $\log 2$ 13. $\log \dfrac{1}{3}$ 14. $\log 7{,}5$

γ) Az alábbi számokat és kifejezéseket írjuk fel egyetlen szám, vagy kifejezés logaritmusaként:

1. 0 2. 1 3. 2 4. -1 5. -2

6. $\log 2 + \log x$ 7. $1 + \log x$ 8. $\log x - \log 3$

9. $2 - \log x$ 10. $2\log x$ 11. $\dfrac{1}{3}\log(x-1)$

12. $2\log(x+1) - 3\log(x-1)$

δ) Az alábbi kifejezéseket hozzuk legegyszerűbb (azaz logaritmusmentes) alakra:

1. ${}^a\log a^x$ 2. ${}^a\log a^x \cdot a^y$ 3. ${}^a\log \dfrac{a^x}{\sqrt[n]{a}}$

4. $\ln e^{x^2}$ 5. $a^{{}^a\log x^2}$ 6. $a^{{}^a\log(1+x)}$

7. $a^{2{}^a\log x}$ 8. $e^{\frac{1}{2}\ln x}$ 9. $e^{\ln x - \ln u}$

10. $e^{-\ln x}$

ε) 1. Milyen összefüggés áll fenn valamely tetszőleges (pozitív) x szám a és b alapú logaritmusai között? Igazoljuk, hogy

$$\boxed{{}^a\log x = {}^a\log b \cdot {}^b\log x}$$

(Ezen összefüggés szerint a különböző alapú logaritmusok csak egy, az a és b alapszámoktól függő konstans szorzóban $({}^a\log b)$ különböznek egymástól!)

Igazolás:

Legyen ${}^a\log x = u$ és ${}^b\log x = v$,

akkor $a^u = x$ és $b^v = x$, tehát $a^u = b^v$

és

$$^{a}\log a^{u} = {}^{a}\log b^{v}, \quad \text{azaz} \quad u = v \cdot {}^{a}\log b,$$

tehát

$$^{a}\log x = {}^{b}\log x \cdot {}^{a}\log b.$$

Ellenőrizzük az összefüggést egy számpéldával! Legyen $a = 10$; $b = 2$ és $x = 4$. Akkor $\log x = \log 4 = 0{,}6020$; ${}^{a}\log b = \log 2 = 0{,}3010$ és ${}^{a}\log x = {}^{2}\log 4 = 2$. Tehát tényleg $0{,}6020 = 0{,}3010 \cdot 2$.

ε) 2. Fentiek alapján igazoljuk, hogy

$$\log x = M \cdot \ln x$$

ahol $M = \log e = 0{,}4329 \approx 0{,}4343$.

ε) 3. Számítsuk ki az 1-től 10-ig terjedő egész számok természetes logaritmusait!

ζ) A logaritmus értelmezése folytán $a^{{}^{a}\log k} = k$. Ennek felhasználásával igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$5 = 10^{\log 5}; \qquad 4 = e^{\ln 4}; \qquad a = e^{\ln a}; \qquad a^{x} = e^{x \ln a};$$

$$a^{x^2} = e^{x^2 \ln a}; \qquad a^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln a}; \qquad x^{x} = e^{x \ln x}$$

(A bemutatott átalakításokat az a^x exponenciális függvények differenciálásánál alkalmazzuk. Lásd: A. III.)

3. §. ELEMI ÚTON MEGOLDHATÓ EGYENLETEK

A műszaki és gyakorlati élet mennyiségtani problémáinak egy nagy sokaságára jellemző, hogy bizonyos adott mennyiségekből, velük összefüggésben levő más (ismeretlen) mennyiségek ($x, y, z, \ldots$) értékeit kell meghatározni, miként ezt már a legelemibb számtani feladatoknál is láttuk. E mennyiségek közötti összefüggéseket *egyenletek*[1] alakjában lehet felírni.

Arra nézve, hogy egy szövegesen megadott feladatot hogyan lehet algebrai nyelven: azaz egyenletek formájában megfogalmazni, általános érvényű szabályok nem állíthatók fel! Mindamellett azonban *néhány elvi fontosságú kérdésre* kell felhívni a figyelmet.

1. Vannak feladatok, amelyeknek már a szövege tartalmazza mindazon feltételeket vagy követelményeket, amelyek alapján az egyenletek felállíthatók. Jellemző ezekre a feladatokra, hogy egy sor számtani művelet elvégzésére adnak utasítást. — Például: meghatározandó az a szám, melynek kétszerese 3-mal nagyobb, mint a fele. Megoldás: Ha a keresett számot x-szel jelöljük, akkor annak kétszerese $2x$, fele $\frac{x}{2}$. Előbbi 3-mal nagyobb az utóbbinál, tehát $2x = \frac{x}{2} + 3$.

[1] Olyan egyenlőséget, mely a benne előforduló betűknek (ismeretleneknek) csak bizonyos értékei mellett áll fenn, *egyenletnek*, és az ismeretlenek ezen értékeit az egyenlet *megoldásainak* vagy *gyökeinek* nevezzük. Az egyenletekkel kapcsolatban a következő kérdések merülnek fel: 1. Van-e megoldása az egyenletnek? 2. Hány megoldása van? 3. Mi módon oldjuk meg az egyenletet? E kérdésekre általános feleletet nem adhatunk. A $\sin x = 2$ egyenletnek nincs megoldása, mert a sinus-függvény legnagyobb értéke 1, tehát $\sin x$ sohasem lehet 2-vel egyenlő. A $2x = 6$ egyenletnek pontosan egy megoldása van: $x = 3$. A $\cos x = 1$ egyenletnek végtelen sok megoldása van: $x = 0{,}2\pi, 4\pi, 6\pi \ldots, -2\pi, -4\pi, -6\pi, \ldots$ Vannak egyenletek, melyek elemi módszerekkel megoldhatók, de vannak olyanok is, amelyeket csak közelítő eljárásokkal tudunk megoldani. Jelen fejezetben csak elemi úton megoldható egyenletekkel foglalkozunk. (A közelítő eljárásokra nézve l. a B. VIII. kötetet.)

Másik példa. Kétféle teát keverünk össze. Az egyik dkg-ja 2,60 Ft, a másiké 2,80 Ft. Mennyit kell 3 kg teához venni az egyikből és mennyit a másikból, hogy dkg-ját 2,72 Ft-ért lehessen adni?

Az első fajtából x, a másikból y dkg-ot veszünk. Ez összesen 3 kg, azaz 300 dkg tartozik lenni, tehát $x + y = 300$. Mivel pedig a keverék dkg-ját 2,72 Ft-ért kell adni, ezért a három kg keverék ára $2{,}72 \cdot 300 = 816$ Ft. Másrészt x dkg teának az ára (az első fajtából) $x \cdot 2{,}60$ és y dkg teának az ára (a második fajtából) $y \cdot 2{,}80$. Ez összesen 816 Ft érték, tehát $2{,}6x + 2{,}8y = 816$.

A feladat szövege tehát az x és y ismeretlenekre a következő két egyenletet szolgáltatja.

$$x + y = 300$$

$$2{,}6x + 2{,}8y = 816$$

2. A feladatok túlnyomó többsége olyan, hogy a szereplő mennyiségek közötti összefüggések egy részét a feladat szövege nem közli. Ha ezeket a rejtett összefüggéseket nem ismerjük, vagy nem vesszük észre, a feladatot nem tudjuk megoldani. A megoldáshoz tehát szakismeretre van szükségünk (pl. a geometria, mechanika, technológia stb. köréből).

Például: Valamely derékszögű háromszög hegyesszögeinek különbsége 30^0. Mekkorák a hegyesszögek?

Itt tudnunk kell, hogy e szögek összege 90^0 (pótszögek).

Tehát α és β meghatározása

az $$\alpha + \beta = 90^0$$

és $$\alpha - \beta = 30^0$$

egyenletekkel történik.

Matematikai szempontból az egyenleteket többféle módon *osztályozhatjuk*. Az egyenletekben előforduló ismeretlenek száma szerint beszélünk *egy-* és *többismeretlenes* egyenletekről, ill. egyenletrendszerekről. Beszélünk továbbá *algebrai* és *nem-algebrai (irracionális* és *transzcendens)* egyenletekről. Az előbbieket a bennük előforduló ismeretlen legmagasabb hatványa alapján: *első-*, *másod-*, ... *n*-edfokú egyenleteknek nevezzük. (Nem-algebrai egyenleteknél fokszámról nem lehet beszélni!)

a) Egyismeretlenes egyenletek megoldása

Az n-edfokú egyismeretlenes algebrai egyenlet általános alakja:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

ahol $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ megadott valós (vagy komplex) számok és $c_n \neq 0$.

Minden algebrai egyenlet felírható a fenti alakban, ahol az egyenlet bal oldala egy n-edfokú polinom, jobb oldala zérus.

A legegyszerűbb s egyúttal legfontosabb (egyismeretlenes) algebrai egyenlet az *elsőfokú* egyenlet. A legegyszerűbb azért, mert csupán egy elsőfokú és legfeljebb még

egy konstans tagot tartalmaz, tehát $c_1x + c_0 = 0$ alakú, vagy ha a c_1, c_0 együtthatók helyett a-t és b-t írunk,

$$\boxed{ax + b = 0}$$

alakú. Az egyenlet megoldása

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Az elsőfokú egyenlet azért a legfontosabb, mert a magasabbfokú egyenletek megoldását általában elsőfokú egyenletekre vezetjük vissza oly módon, hogy az egyenlet polinomját elsőfokú tényezőkre bontjuk fel. (Gyöktényezős alak.)

Példák:

I. Oldjuk meg az $x^2 - 4 = 0$ másodfokú egyenletet. Evégből a bal oldalt (mint két szám négyzetének különbségét) $(x - 2)(x + 2)$ szorzat alakban írjuk fel.

Így az egyenlet

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

alakú. Ám egy szorzat akkor és csakis akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Tehát a szóban forgó egyenletnél két eset van

$$1.\ x - 2 = 0$$

$$2.\ x + 2 = 0$$

Így az adott másodfokú egyenlet megoldását két elsőfokú egyenlet megoldására vezettük vissza!

Az 1. egyenlet megoldása: $x = 2$; a 2. egyenleté $x = -2$.

Így az $x^2 - 4 = 0$ (gyökei): $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$.

Általában az $x^2 - k^2 = 0$ egyenlet $(x - k)(x + k) = 0$ alakban írható, ahonnan az

$x - k = 0$ és $x + k = 0$ egyenletekhez jutunk. Ezek megoldása

$x = k$ és $x = -k$, minek folytán az

$x^2 - k^2 = 0$ egyenlet megoldásai:

$x_1 = k$ és $x_2 = -k$, vagy összefoglalóbb írással

$$x_{1,2} = \pm k.$$

II. Oldjuk meg az $x^2 - 6x + 5 = 0$ egyenletet.

Ez az egyenlet alkalmas kiegészítéssel visszavezethető az előbbi típusra. Evégből az egyenlet polinomjához

$9 - 9 = 0$-t adunk hozzá:

azaz

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4 = 0$$

Ám az első három tag $(x-3)$-nak négyzete, tehát

$$(x-3)^2-4=0$$

Így a bal oldal két szám négyzetének különbsége, tehát írható a következő alakban

$$(x-3-2)(x-3+2)=0$$

vagyis

$$(x-5)\cdot(x-1)=0$$

Innen két elsőfokú egyenletet kapunk

$$x-5=0$$

$$x-1=0$$

Ezek megoldásai: $x=5$ és $x=1$, az adott másodfokú egyenlet megoldásai.

Általában az

$$ax^2+bx+c=0$$

másodfokú egyenletet, ahol $a>0$, a fentiekhez hasonló kiegészítésekkel és alkalmas átalakításokkal *mindig visszavezethetjük két elsőfokú egyenlet megoldására*, például a következő módon:

$$ax^2+bx+c=(\sqrt{a}\,x)^2+2\sqrt{a}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}}x+c=$$

$$=(\sqrt{a}\,x)^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}}x+\frac{b^2}{4a}+c-\frac{b^2}{4a}=$$

$$=\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right)=0$$

Innen a következő két elsőfokú egyenletre jutunk,

$$1.\quad\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}=0$$

$$2.\quad\frac{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}=0$$

Mivel pedig egy tört csak úgy lehet nulla, ha a számlálója nulla, de a nevezője zérustól különböző (ami $a\neq 0$ folytán jelen esetekben tényleg teljesül), a két elsőfokú egyenlet megoldása:

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

és

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Így megkaptuk az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

A másodfokú egyenletnek, mint látható, két különböző valós gyöke van, ha $b^2 - 4ac > 0$; két megegyező valós gyöke van (kétszeres gyök), ha $b^2 - 4ac = 0$; két (konjugált) komplex gyöke van, ha $b^2 - 4ac < 0$.[1]

Ha az

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

egyenleteket összeszorozzuk, illetőleg összeadjuk, a következő nevezetes összefüggésekhez jutunk:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \qquad \text{és} \qquad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Ezen kifejezések felhasználásával az $ax^2 + bx + c$ polinom átalakítható a következő módon:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2) =$$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Az

$$\boxed{(x - x_1)\,(x - x_2) = 0}$$

alakban felírt egyenletet *gyöktényezős* alakú egyenletnek szokás nevezni.

III. Oldjuk meg az $x^3 - x = 0$ egyenletet!

Az $x^3 - x$ polinom három elsőfokú tényező szorzatára bontható.

Ugyanis $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)\,(x + 1)$

Tehát az egyenlet gyöktényezős alakja

$$x(x - 1)\,(x + 1) = 0$$

Innen a következő három elsőfokú egyenlethez jutunk:

1. $x = 0$
2. $x - 1 = 0$
3. $x + 1 = 0$

[1] A $>$ $<$ jelekre nézve a 4. 6-t a 48. oldalon.

Ezek megoldásai rendre $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Tehát az adott harmadfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

IV. Oldjuk meg a $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ egyenletet!

Az egyenlet polinomja némi átalakítással és az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság felhasználásával felbontható egy elsőfokú és egy másodfokú polinom szorzatára:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 2x^3 - 2 - 7x^2 + 7x = 2(x^3 - 1) - 7x(x - 1) =$$
$$= 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 7x(x - 1) = (x - 1)(2x^2 + 2x + 2 - 7x) =$$
$$= (x - 1)(2x^2 - 5x + 2)$$

Tehát a szóban forgó egyenlet

$$(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$$

folytán az

$$x - 1 = 0$$

és

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

egyenletek megoldására vezethető vissza. Így az adott egyenlet gyökei

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = \frac{1}{2}$$

V. Oldjuk meg az $ax^4 + bx^2 + c = 0$ negyedfokú egyenletet!

Ez az egyenlet azonban x^2-ben másodfokú. Ha ui. az $x^2 = y$ helyettesítést alkalmazzuk, az $ay^2 + by + c = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

Jelöljük ennek megoldásait y_1 és y_2-vel, akkor az eredeti egyenlet gyökeit az $x^2 = y_1$ és $x^2 = y_2$ egyenletek megoldásai szolgáltatják.

Ezek rendre a következők:

$$x_1 = \sqrt{y_1}, \quad x_2 = -\sqrt{y_1}, \quad x_3 = \sqrt{y_2}, \quad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

VI. Oldjuk meg az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ negyedfokú (szimmetrikus) egyenletet!

Visszavezethető másodfokú egyenletekre. Mivel $a \neq 0$, az egyenletet $x = 0$ nem elégíti ki, tehát $x \neq 0$ és így az egyenletet oszthatjuk x^2-tel.

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

vagy

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0$$

ahonnan

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Ha most az

$$x + \frac{1}{x} = y$$

helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

és az egyenlet a következőképpen alakul:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

azaz

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

Jelöljük ezen egyenlet gyökeit y_1 és y_2-vel. Akkor az eredeti egyenlet gyökeit az

$$x + \frac{1}{x} = y_1$$

és

$$x + \frac{1}{x} = y_2$$

másodfokú egyenletek megoldásai adják.

A bemutatott példákból megállapíthatjuk, hogy a másodfokú egyenlet mindig visszavezethető elsőfokúra.

A III—VI. példák *speciális típusú harmad- és negyedfokú egyenletek*, melyek szorzatfelbontás vagy alkalmas helyettesítésekkel visszavezethetők első- vagy másodfokú egyenletekre. Ezek az eljárások azonban nem mindig alkalmazhatók ilyen egyszerűen. Mindamellett sikerült a másodfokú egyenletéhez hasonló, de annál lényegesen bonyolultabb formulákat levezetni, amelyekkel *a harmad- és negyedfokú egyenletek gyökei a négy alapművelet, valamint a hatványozás és gyökvonás véges számú alkalmazásával kiszámíthatók!* Kiemeljük, hogy *ötöd- és magasabbfokú egyenleteknél ilyen formulák már nem állnak rendelkezésre.* Általában csak közelítő módszerekkel oldhatók meg. (L. B. VIII.) Az egyenlet fokszámának 4-ről 5-re való emelése tehát *minőségi változást* von maga után! Mindezek ellenére *bebizonyítható, hogy minden algebrai egyenletnek van megoldása* (ez az *algebra alaptétele*) s *hogy a megoldások száma annyi, mint az egyenlet fokszáma.* (Az egyenlet gyökei között megegyezők, azaz többszörös gyökök, valamint konjugált komplex számok is lehetnek.)

A gyakorlatban előforduló egyenletek rendszerint *nem* a

$$c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

alakban jelentkeznek. Ekkor első feladatunk azokat fenti általános alakra hozni. Ez azon tény alapján lehetséges, mely szerint egyenlő mennyiségeket egyenlő módon változtatva, ismét egyenlő mennyiségeket kapunk. Ilyenkor azonban előfordulhat, hogy olyan egyenlethez jutunk, melynek gyökei csak részben, vagy egyáltalán nem elégítik ki az eredeti egyenletet, avagy csak kevesebb megoldása van, mint az eredetinek.

A következő *eseteket* kell megkülönböztetnünk:

1. Ismeretlent tartalmazó kifejezéssel nem szabad osztani, mert akkor bizonyos gyökök elvesznek.

Példa:

Ha az $x^2 - 2x = 0$ egyenletet x-szel osztjuk, $x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása $x = 2$. Ez a szám az adott egyenletnek is megoldása. De az x-szel való osztás révén elvesztettük az $x = 0$ megoldást. (0-val osztani nem szabad!)

2. Ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, a kapott egyenlet gyökei nem feltétlenül gyökei az eredeti egyenletnek.

Példa:

Ha az

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2 + \frac{2}{x^2-1}$$

egyenletet $(x^2 - 1)$-gyel szorozzuk, $x^2 - 1 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei ($x_1 = 1$ és $x_2 = -1$) az adott egyenletet nem elégítik ki.

3. Ha az egyenlet mindkét oldalát hatványozzuk, a kapott új egyenletnek rendszerint több megoldása van, mint az eredetinek. (Különösen szembeötlő ez az irracionális egyenleteknél. L.: a 37. oldalon!)

Példa:

Az $x - 1 = 2$ egyenletnek csak egy megoldása van: $x = 3$. Az egyenlet négyzetreemelése folytán $(x - 1)^2 = 4$ egyenlethez jutunk. Ezt az egyenletet $x = -1$ is kielégíti, mert $(-2)^2 = 4$.

Az algebrai egyenletek mellett műszaki szempontból fontosak az *irracionális* és *transzcendens* (exponenciális, logaritmikus, goniometrikus stb.) egyenletek. Ezek közül az irracionális egyenletek mindig, a transzcendens egyenletek csak kivételes esetekben vezethetők vissza algebrai egyenletekre. (L. a 37—39. oldalt és a B. VIII. kötetet.)

Feladatok

a) Elsőfokú egyenletek

1. $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 5)^2 = 6$

2. $(2x - 10)(5x + 3) - (5x - 2)(2x + 3) + 24 = 0$

3. $\frac{3x + 5}{12} - \frac{2x - 3}{6} = 1 + \frac{2x - 5}{18}$

4. $\frac{1}{x - 4} + \frac{1}{x - 5} = \frac{2}{x - 6}$

5. $\frac{4x + 7}{3x + 4} = \frac{8}{5}$

6. $\frac{x - 4}{3x - 18} + \frac{x - 2}{4x - 24} = \frac{x - 8}{6 - x} + \frac{3}{2}$

7. $3x - 2\dfrac{5x-4}{3} = 2$

8. $2\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{2x}{3} - 1\right)\left(\dfrac{x}{3} + 1\right) = 2$

9. $px + q^2 = qx + p^2$ $\quad (p \neq q)$

10. $px + 2pq = p^2 + qx + q^2$ $\quad (p \neq q)$

11. $3ax + 5b^3c = cx + 5ab^3 + 2ax$ $\quad (a \neq c)$

12. $\dfrac{x+a}{x+b} + \dfrac{x-b}{x-a} = 2$ $\quad (a \neq b)$

13. $\dfrac{2a-x}{3a^2x} - \dfrac{5a-x}{6abx} = 1 - \dfrac{1+4ab}{4ab}$ $\quad \left(a \neq \dfrac{4}{5}b\right)$

14. Mekkora α, ha $l_2 = l_1(1 + \alpha t)$

15. Mekkora k, ha $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{f}$

16. Mekkora t, ha $c_1m_1(t_1 - t) = c_2m_2(t - t_2)$

17. Egy laboratóriumban 5 kg 60%-os alkohol van. Mennyit kell hozzáönteni a 96%-os alkoholból, hogy 80%-ossá váljék.

18. Egy gépen valamely tömegmunka elvégezhető 120 óra alatt. Egy másik gépen ugyanaz a munka 90 óra alatt végezhető el. Mennyi idő alatt készül el a munka, ha mind a két gép egyszerre dolgozik?

19. Egy munkáscsapatba 5 új munkás áll be, hogy a 16 hétre tervezett munkát 12 hét alatt befejezze. Hány munkás volt eredetileg a csapatban?

20. Egy 5 m hosszú gerendát kétfelé kell vágni úgy, hogy az egyik darab 90 cm-rel legyen hosszabb, mint a másik. Mekkorák lesznek a darabok?

β) Másodfokú egyenletek

1. $2x^2 + 9x + 4 = 0$ 2. $9x^2 - 30x + 25 = 0$ 3. $x^2 - 4x + 13 = 0$

4. $3x^2 - 8x = 0$ 5. $(5x - 2)(2x + 1) = 0$ 6. $\dfrac{2x+5}{3x-4} = \dfrac{6x+8}{2x-5}$

7. $\dfrac{2x-1}{x+3} - \dfrac{1-x}{x} = 3\dfrac{x-2}{x-1}$ 8. $ax^2 - (a-b)x - b = 0$

9. $(x + 1)^2 - k^2(x^2 - 1) = 0 \quad k^2 \neq 1$

10. $\dfrac{x-a}{x} + \dfrac{3a^2}{x(a+x)} = \dfrac{x^2}{x^2+ax} - \dfrac{x-3a}{x+a}$

11. Mekkora i, ha $Q = 0{,}24 \cdot i^2rt$

12. Mekkora t, ha $s = s_0 + \dfrac{a}{2}t^2$

13. Mekkora r, ha $F = 2r^2\pi + 2r\pi m$

14. Mekkora t, ha $s = s_0 + v_0t + \dfrac{g}{2}t^2$

15. Egy r sugarú, H magasságú egyenes körhengert ráállítunk egy sima r-sugarú félgömbre. Ez a test nem fog felbillenni, ha H értéke kisebb, mint az a pozitív szám amely kielégíti az

$$r\left(\frac{2r^3\pi}{3}+r^2\pi H\right)=\frac{2\pi r^3}{3}\cdot\frac{5r}{8}+r^2\pi\cdot H\left(r+\frac{H}{2}\right)$$

egyenletet. Meghatározandó a kritikus H érték!

16. 1 cm³ 0° C-ú Hg térfogata $t°$ C hőmérséklet esetén

$$V_t=1+2\cdot10^{-4}\cdot t+3\cdot10^{-8}\cdot t^2$$

Milyen hőmérsékleten lesz a térfogata 1,001 cm³?

17. 210 téglából egyenlőszárú háromszög alakú, egy téglányi szélességű falat kell építenünk úgy, hogy minden sorban eggyel kevesebb tégla legyen, mint az alatta levőben és a legfelsőben már csak egy. Hány téglával kell kezdenünk a legalsó sorban és hány sor magas lesz a fal?

γ) Magasabbfokú egyenletek. Itt az eljárás az, hogy az egyenlet polinomját első- vagy másodfokú polinomok szorzatára bontjuk (gyöktényezők) s ezeket a tényezőket különkülön egyenlővé tesszük zérussal. De lehetséges az is, hogy alkalmas helyettesítéssel sikerül az egyenletet alacsonyabb fokú egyenletekre transzformálni.

A) Konstans tagot nem tartalmazó egyenletek. (Egyik gyök 0)

1. $x^3-x=0$ 2. $x^4-x^2=0$ 3. $16x^3-9x=0$
4. $4x^3-5x^2=0$ 5. $x^3-5x^2+6x=0$ 6. $x^3+x=0$

B) Binom egyenletek. (Egy ismeretlenes és egy ismert tagot tartalmaznak.)

7. $x^3-1=0$ 8. $x^3-a^3=0$ 9. $a^3x^3-b^3=0$
10. x^3+1-0 11. $x^3+a^3=0$ 12. $x^4-1=0$
13. $x^6-1=0$

C) Harmadfokú szimmetrikus (reciprok) egyenletek: $ax^3+bx^2+bx+a=0$.

[A polinom első és utolsó tagja: $a(x+1)(x^2-x+1)$, a két középső $bx(x+1)$ alakban írható fel és végül $(x+1)$ kiemelhető. Ki lehet mutatni, hogy amennyiben α az egyenlet gyöke, akkor $\frac{1}{\alpha}$ is az. Ezért reciprok egyenlet a neve.]

14. $2x^3-3x^2-3x+2=0$ 15. $3x^3+7x^2-7x-3=0$
16. $3x^3-13x^2+13x-3=0$ 17. $x^3+x^2+x+1=0$

D) Az $ax^4+bx^2+c=0$ egyenlet. [$x^2=y$ helyettesítéssel másodfokú egyenletre redukálódik. Ha ennek gyökei y_1, y_2, akkor az eredeti egyenleté:

$$x_1=+\sqrt{y_1};\quad x_2=-\sqrt{y_1};\quad x_3=+\sqrt{y_2};\quad x_4=-\sqrt{y_2}.]$$

18. $x^4-5x^2+4=0$ 19. $x^4-17x^2+16=0$ 20. $x^4-13x^2+36=0$
21. $x^4-20x^2+64=0$ 22. $x^4-34x^2+225=0$ 23. $(x-5)^4-(x-5)^2=12$
24. $(x^2-9x)^2+34(x^2-9x)+280=0$ 25. $(x^2+3x+2)^2+7(x^2+3x)+26=0$
26. $x^4-(a^2+1)x^2+a^2=0$ 27. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$
28. $x^4-2x^2(a^2+2a+2)+a^4+4a^3+4a^2=0$

E) Az $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ negyedfokú szimmetrikus (reciprok) egyenlet. [x^2-tel való osztás és

$$x+\frac{1}{x}=y,\quad \text{ill.:}\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

helyettesítéssel másodfokúra redukálható. Az így nyert y_1, y_2 gyökökből az eredeti egyenlet gyökei az

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad \text{és} \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

másodfokú egyenletek megoldásából adódnak.]

30. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ 31. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

32. $8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0$ 33. $x^5 - 1 = 0$

δ) Irracionális egyenletek. Irracionálisnak nevezzük az egyenletet, ha az ismeretlen gyökjel alatt is szerepel. Az ilyen egyenlet hatványozással algebrai egyenletté alakítható. De az így nyert *algebrai* egyenlet megoldásai *nem* mindig gyökei az adott egyenletnek. Így például a $\sqrt{x-1} = 3 - x$ egyenletet négyzetre emelve, rendezések után az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ *gyökei* közül azonban csak az első elégíti ki az adott irracionális egyenletet, mert $\sqrt{5-1} = 2$, míg $3 - 5 = -2$. Így előfordulhat, hogy egy irracionális egyenletnek egyáltalán nincs megoldása.

Példa:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+1}$$

Négyzetreemelés és rendezés után

$$\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+3} = x - 2$$

Újból négyzetreemelve és rendezve

$$12x = -11$$

ahonnan

$$x = -\frac{11}{12}$$

Ezt az eredményt az eredeti egyenletbe behelyettesítve, a bal oldalon $\frac{12}{\sqrt{12}}$-t, a jobb oldalon viszont $\frac{2}{\sqrt{12}}$-t kapunk.

Feladatok

1. $\sqrt{3x-2} = 4$ 2. $\sqrt{4x^2 - 3x - 3} = 2x - 1$

3. $\sqrt{2x+8}\,\sqrt{3x-13} = 0$ 4. $3 + \sqrt{3x-5} = 2x$

5. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ 6. $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6} = 6$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+13}$

8. $\sqrt{3x+7} - 2\sqrt{x-5} = 3\sqrt{7-x}$

9. $\sqrt{ax+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 10. $\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x^2-a^2} = 2a$

11. $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

ε) Transzcendens egyenletek. A) Exponenciális egyenletek. Ha az ismeretlen a kitevőben is szerepel, az egyenletet exponenciális egyenletnek nevezzük. Bizonyos esetekben ilyen egyenletek elemi úton megoldhatók, elsősorban akkor, ha az ismeretlen *csak* kitevőben fordul elő! (Az $x + 2^x = 2$ egyenlet viszont csak közelítő eljárással oldható meg!)

Ha az egyenlet mindkét oldala egytagú kifejezés, az egyenletet logaritmálás útján algebrai egyenletté alakíthatjuk.

Példa:

Oldjuk meg az $5^x \cdot 2^{3x-1} = 3$ egyenletet.

Vegyük mindkét oldal logaritmusát! x-ben elsőfokú egyenletet kapunk.

$$x \log 5 + (3x - 1) \log 2 = \log 3$$

Tehát

$$x \log 5 + 3x \log 2 = \log 3 + \log 2$$

ahonnan

$$x(\log 5 + \log 8) = \log 3 + \log 2$$

vagy

$$x \cdot \log 40 = \log 6$$

és

$$x = \frac{\log 6}{\log 40} = \frac{0{,}7782}{1{,}6021} = 0{,}485$$

Vannak esetek, midőn alkalmas helyettesítések vezetnek célhoz.

Példa:

A $2^x + 2^{2-x} = 5$ egyenlet $2^x = y$ helyettesítéssel

$$y + \frac{4}{y} = 5$$

alakú lesz. Azaz $y^2 - 5y + 4 = 0$; ahonnan $y_1 = 4$ és $y_2 = 1$. Tehát

$$2^x = 4 \text{ és } 2^x = 1.$$

Így $x_1 = 2$ és $x_2 = 0$ az adott egyenlet megoldásai.

Feladatok

1. $1{,}08^x = 4{,}92$
2. $32^x = \frac{1}{5}$
3. $10^x = 1{,}478^{10}$
4. $2^x \cdot 3^{x-1} = 5$
5. $\sqrt[x]{8^{2x+3}} = 512$
6. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-7} = \left(\frac{16}{9}\right)^{x-14}$
7. $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$
8. $2^x + 2^{x+2} = 10$
9. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

B) Logaritmikus egyenletek. Ha az ismeretlen a log jele után is áll, az egyenletet logaritmikus egyenletnek nevezzük. Ezen egyenletek közül elsősorban

azok oldhatók meg elemien, melyeknél az ismeretlen csak a log jel után áll, továbbá, ha sikerül az egyenlet mindkét oldalát egy-egy szám vagy kifejezés logaritmusaként felírni.

10. $\log x + \log 2 = 1$

11. $\log (x + 2) - \log x = 2$

12. $\dfrac{\log (x^3 + 26)}{\log (2 + x)} = 3$

13. $\log (x + 13) - \dfrac{1}{2}\log (x + 4) = 1$

14. $12^{\log x} = 144$

15. $5^{2(\log x - 4)} = 125^{(4 - \log x)}$

C) Goniometrikus egyenletek (l. 78. oldalon).

b) Egyenletrendszerek

Valamely n ismeretlent tartalmazó *egyenletnek* általában végtelen sok megoldása van. Minden megoldás n olyan számot jelent, melyek az egyenletet egyidejűleg elégítik ki.

Több egyenletből álló ún. *egyenletrendszer* megoldása alatt az egyenletek közös megoldását (ill. megoldásait) értjük. Az egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy az ismeretlenek (és ezzel az egyenletek) számát fokozatosan csökkentjük mindaddig, mígnem egyismeretlenű egyenlethez jutunk. Az ismeretlenek számának csökkentésére ugyan általános érvényű módszer nincs, mégis a gyakorlatban előforduló egyenletrendszerek legtöbbjénél (feltéve, hogy azok elemi úton egyáltalán megoldhatók) alkalmazható a *helyettesítés módszere*. Legegyszerűbbek a viszonyok az *elsőfokú* egyenletrendszereknél. Itt a helyettesítési módszer mellett az *egyenlő együtthatók módszere*, az *egyenlítési módszer* és a *determinánsok módszere* (l.: A. IX. kötet) is mindig alkalmazható.

Magasabbfokú egyenletrendszereknél a viszonyok lényegesen bonyolultabbak, s a megoldási technika igen sokszor egyéni leleményességet követel. Transzcendens egyenletrendszerek pedig csak ritka kivételes esetekben oldhatók meg elemi módszerekkel.

a) Elsőfokú egyenletrendszerek. A gyakorlat szempontjából legjelentősebb eset az, midőn az ismeretlenek és egyenletek száma megegyezik. Két ismeretlen esetén az egyenletrendszer általános alakja.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Ha a konstans tagok mindegyike zérus, azaz $c_1 = c_2 = 0$, akkor az egyenletrendszer *homogén*; ha legalább egyikük zérustól különböző, akkor *inhomogén*. Meg lehet mutatni, hogy az inhomogén egyenletrendszernek pontosan *egy* megoldása van, ha $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (azaz: az egyenletrendszer determinánsa zérustól különböző), *nincs* megoldása, ha $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, azaz $\left(\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}\right)$ és *végtelen sok* megoldása van, ha

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

amikor tehát a két egyenlet csak egy konstans szorzóban különbözik egymástól, azaz ekvivalens. (Lineáris függőség.) Az alábbi egyenletrendszerek közül:

$$1.\ \begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 2x - 3y = 19 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -6x + 4y = 1 \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -6x + 4y = -4 \end{cases}$$

az elsőnek egy megoldása van ($x = 5$; $y = -3$); a másodiknak egy sincs, mert

$$\left(\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}\right)$$

(a két egyenlet ellentmond egymásnak!), a harmadiknak pedig végtelen sok van (mert a két egyenlet lényegében azonos, tehát t. k. csak *egy* egyenlet). A gyakorlatban főként az első esettel találkozunk.

Az

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}}$$

homogén egyenletrendszernek a (0,0) számpár mindig eleget tesz (*„triviális megoldás"*). Ha az egyenletrendszer determinánsa $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, azaz

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

tehát a két egyenlet ekvivalens, akkor a megoldások száma *végtelen* és fennáll, hogy

$$x : y = b_1 : (-a_1)$$

vagy

$$x = \lambda \cdot b_1 \quad \text{és} \quad y = -\lambda a_1,$$

ahol λ tetszőleges (valós) szám, ún. arányossági tényező.

Az itt elmondottak némi általánosítással, kettőnél több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekre is kiterjeszthetők. (Lásd részletesebben az A. IX. kötetet.)

Feladatok

1. $\begin{aligned} 18x - 31y &= 5 \\ 24x - 53y &= -5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} \frac{2x}{3} + \frac{y-5}{4} &= 12 \\ \frac{3x-8}{7} + \frac{2y}{3} &= 18 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} \frac{5x+2}{y+3} &= 4 \\ \frac{3x-2}{y-1} &= 4 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} \frac{2}{3}(x+1) - \frac{3}{4}(y+3) &= 0 \\ \frac{1}{2}(3x-1) - \frac{3}{5}(2y-5) &= 7 \end{aligned}$

5. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}-8\right)+5=\frac{2}{3}\left(\frac{y}{5}+3\right)$

$\frac{5}{6}\left(\frac{x}{2}+12\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{y}{3}-5\right)=15$

6. $\frac{5}{x}-\frac{7}{y}=2$

$\frac{14}{x}-\frac{7}{y}=112$

7. $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23$

$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

8. $ax+by=2a$

$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{2}{a}$

9. $\frac{x+a}{y+b}=a$

$\frac{x+b}{y+a}=b$ $\quad (a\neq b)$

10. $\frac{ax+by}{ax-by}=\frac{a-b}{a+b}$

$ax-by=1$

11. $ax-by=ab+b^2$

$-(a-b)x+(a+b)y=(a-b)^2$

12. $a(x+y)+b(x-y)=4ab$

$a(x-y)-b(x+y)=2a^2-2b^2$

13. Mekkora E és R, ha $E=i_1(R+r_1)=i_2(R+r_2)$?

14. Mekkora i_1 és i_2, ha

$$i_1+i_2=i$$

$$i_1 r_1=i_2 r_2$$

15. Mekkora x_1 és x_2, valamint $x-x_1$ és x_2-x ha

$$m_1 x_1+m_2 x_2=(m_1+m_2)x$$

$$x_2-x_1=d$$

16. Egy hajó a Dunán lefelé haladva 6 óra alatt 240 km utat tesz meg, felfelé haladva pedig 10 óra alatt 240 km-est. Mekkora a hajó és a víz sebessége?

17. Kétféle teát kevernek össze. Az egyik kg-ja 2,60 Ft, a másiké 2,80 Ft. Mennyit kell 3 kg teához venni az egyikből és mennyit a másikból, hogy dkg-ját 2,72 Ft-ért lehessen adni?

18. $x+y+z=27$

$2x-3y+4z=31$

$4x-6y+z=-15$

19. $x+y+z=21$

$x+y-z=3$

$y=\frac{x+z}{2}$

20. $x+y-z=8$

$\frac{x}{y}=2$

$\frac{y}{z}=3$

21. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5}{4}$

$\frac{x}{3}+\frac{z}{2}=\frac{5}{2}$

$\frac{2y}{3}+\frac{3z}{4}=\frac{11}{4}$

22. $$\frac{3y-2x}{4}+\frac{4z-3x}{3}+\frac{2y-7z}{6}=0$$

$$\frac{5x-3y}{15}-\frac{4y-3x}{5}+\frac{7y+2z}{9}=2\frac{2}{15}$$

$$\frac{7z}{8}-\frac{6x-5y}{12}+\frac{3z-8x}{3}=-5\frac{23}{24}$$

23. $x:y:z=3:4:5$
$x+y+z=36$

24. $x:y:z=2:3:4$
$2x-y+5z=210$

25. $x:y:z=3:4:7$
$5x-2y+3z=28$

26. $x+y=a$
$y+z=b$
$x+z=c$

27. $bx-ay=b-a$
$ay-bz=a-b$
$az-bx=a-b$

28. Mekkora i_1, i_2, i_3, ha
$i_1+i_2+i_3=i$
és $i_1 r_1=i_2 r_2=i_3 r_3$

β) Magasabbfokú egyenletrendszerek. Itt a viszonyok lényegesen bonyolultabbak, mint az elsőfokú egyenletrendszereknél. Aránylag legegyszerűbb a helyzet, ha az ismeretlenek és egyenletek száma kettő és az egyik egyenlet másodfokú, a másik azonban elsőfokú. Ilyen egyenletrendszernek mindig két — nem szükségképpen valós — megoldása van. A gyökök meghatározása legegyszerűbben a *helyettesítő módszerrel* történik. A legelőnyösebb az eljárás, ha az elsőfokú egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent. (Általában célszerű mindig azt az ismeretlent kifejezni, amely első hatványon szerepel, mert így elkerülhetők az irracionális egyenletek.)

Példa:

$$x^2+2y=10$$
$$2x+3y=13$$

A második egyenletből

$$x=\frac{13-3y}{2}.$$

Ezt helyettesítve az elsőbe, a kellő rendezések után

$$9y^2-70y+129=0$$

egyenlethez jutunk, melynek gyökei

$$y_1=3 \text{ és } y_2=\frac{43}{9}.$$

Ezen értékek visszahelyettesítésével

$$x_1=2 \text{ és } x_2=-\frac{2}{3}.$$

(Vigyázzunk arra, hogy ha y_1 és y_2 értékeit az első egyenletbe helyettesítjük,

$$x\text{-re } -2 \text{ és } +\frac{2}{3}$$

értékeket is kapunk a négyzetgyökvonás folytán, de ezek hamis gyökök!)

Ha az egyenletek egyike sem elsőfokú, akkor általános megoldási módszer nem adható meg. Van, amikor a helyettesítő, vagy az egyenlő együtthatók módszere vezet célhoz; néha egy alkalmas helyettesítéssel sikerül megoldani az egyenletrendszert. Így például az

$$a_1x^2 + b_1y^2 = c_1$$
$$a_2x^2 + b_2y^2 = c_2$$

egyenletrendszer esetén $x^2 = u$, $y^2 = v$ helyettesítést alkalmazunk. (A megoldások száma négy.)

Feladatok

1. $xy = 21$
   $x + y = 10$

2. $x^2 + y^2 = 250$
   $x - y = 4$

3. $x^2 - y^2 = 21$
   $x - y = 3$

4. $x^2 + xy + y^2 = 19$
   $x + y = 5$

5. $x^2 - 2xy + x - y = 2$
   $2x - 3y = 2$

6. $x^2 + xy + 2y^2 - x + 3y = 26$
   $x + 4y = 11$

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
   $x + y = 5$

8. $x^2 + y^2 = 130$
   $xy = 63$

9. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$
   $xy = 2$

10. $3x^2 + 4y^2 = 48$
    $2x^2 + 3y^2 = 35$

11. $xy - 3x + y = -7$
    $2xy + x - 3y = 9$

12. $x^2 + 2xy + y^2 = 2500$
    $x^2 - 2xy + y^2 = 1296$

13. $\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} = 14$
    $x = y^2 + 1$

14. $x^3 - y^3 = 386$
    $x - y = 2$

15. $x + xy + y = 5$
    $x^2 + x^2y^2 + y^2 = 9$

16. $V = 10r$
    $$V - 50 = \frac{10}{\frac{1}{r} + 0{,}01}$$

17. Mekkora r_1 és r_2, ha

$$\frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{V}{i_1}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{V}{i_2} \quad (V = 240;\ i_1 = 10;\ i_2 = 2{,}4)$$

18. Mekkora i és r, ha

$$ri = V$$

$$i - i_1 = \frac{V}{r + r_1} \quad (V = 500; \quad r_1 = 25; \quad i_1 = 1)$$

és $i > 0$; $r > 0$

19. Mekkora t és k, ha

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad (d = 25; \quad f = 30)$$

$$t - k = d$$

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$

$x + y + z = 19$

$x - y = 1$

21. $x^2 + y^2 = z^2$

$x + y + z = 24$

$xy = 48$

22. $xy + xz + yz = 650$

$x : y : z = 2 : 3 : 4$

23. $xyz = 7500$

$x : y : z = 3 : 4 : 5$

24. $xy + xz + yz = 650$

$x + y + z = 19$

$xy = z^2$

25. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$x + y + z = 11$

$xy = z$

26. Mekkora r és m, ha $r^2\pi m = V$ és $2r\pi m = P$?

27. Mekkora K, ha $\frac{SK}{K^2 - 1} = R$ és $S\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} = D$. Igazoljuk, hogy

$$K_1 = \frac{1}{K_2}!$$ (R, D ismertnek tekintendő!)

28. $u + v = 2$

$x + y = 2$

$ux = 45$

$vy = 21$

4. § EGYENLŐTLENSÉGEK

a) Az egyenlőtlenségek tulajdonságai

Ha a és b egymástól különböző valós számok, akkor

vagy

$$a < b \text{ (olv.: } a \text{ kisebb, mint } b,)$$

vagy

$$a > b \text{ (olv.: } a \text{ nagyobb, mint } b)$$

Az $a < b$, $a > b$ relációkat *egyenlőtlenségeknek* nevezzük.[1]

[1] Ha a és b megegyező valós számok, akkor $a = b$. E relációt *egyenlőségnek* nevezzük.

Az egyenlőtlenségek fontosabb tulajdonságait az alábbiakban foglaljuk össze:

1. Ha $a < b$,

akkor $b > a$.

Szavakban: *az egyenlőtlenség iránya megváltozik, ha az egyenlőtlenség oldalait felcseréljük.* (Aszimmetria.)[1]

2. Ha $a > b$,

és $b > c$

akkor $a > c$

(Az egyenlőtlenség ezen tulajdonságát *tranzitivitásnak* nevezzük.)[2]

3. Ha $a > b$,

akkor $a + c > b + c$

és $a - c > b - c$

(Tehát *szabad az egyenlőség mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadni, vagy mindkét oldalból ugyanazt a számot kivonni.*[3]

4. Ha $a > b$ és $c > 0$,

akkor $ac > bc$

és

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

(Szavakban: *az egyenlőtlenség iránya nem változik, ha mindkét oldalt egy pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk.*)

5. Ha $a > b$ és $c < 0$,

akkor $ac < bc$

és

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

(Szavakban: *az egyenlőtlenség iránya megváltozik, ha mindkét oldalt egy negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk.*)

[1] Az egyenlőség is *tranzitív*, azaz, ha $a = b$ és $b = c$, akkor $a = c$.

[2] Ez a tulajdonság lehetővé teszi az egyenlőtlenség rendezését. Ha pl.: $a < b$, akkor mindkét oldalból kivonva b-t, $a - b < 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Vagy, ha például: $x - 2 < 3$, akkor ebből következik, hogy $x < 5$.

[3] Ha $a_1 > b_1$

és $a_2 < b_2$

akkor három eset lehetséges:

$$a_1 + a_2 \gtreqless b_1 + b_2$$

Példák:

a) $2 > 0$, $1 < 2$, $3 > 2$ b) $2 > 0$, $1 < 4$, $3 < 4$ c) $2 > 1$, $2 < 3$, $4 = 4$

6. Ha $a_1 > b_1$

és $a_2 > b_2$

akkor $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$

(Tehát, *ha két egyenlőtlenség iránya megegyezik, az összeadás révén nyert egyenlőtlenség iránya is megegyezik az adottakéval.*)[1]

7. Ha a_1, b_1, a_2, b_2 pozitív számok és

$$a_1 > b_1$$
$$a_2 > b_2$$

akkor $a_1 \cdot a_2 > b_1 \cdot b_2$

(Megegyező irányú egyenlőtlenségek szorzása minden további nélkül lehetséges, ha a tagok pozitív előjelűek. Más esetekben a szorzategyenlőtlenség iránya külön megállapítandó!)

8. Ha a és b pozitív számok és n pozitív egész szám, továbbá $a > b$, akkor

$$a^n > b^n$$

és $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

(ha n páros szám, a gyök pozitív előjellel veendő!)

Szavakban: *szabad az egyenlőtlenség mindkét oldalát hatványozni, vagy mindkét oldalból gyököt vonni, feltéve, hogy mindkét oldalon egy-egy pozitív szám áll.*

9. Ha a és b zérustól különböző és megegyező előjelű számok, továbbá

$$a > b$$

akkor $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(Szavakban: *ha az egyenlőtlenség mindkét oldala megegyező előjelű, a reciprok értékekre való áttérésnél az egyenlőtlenség iránya megváltozik.*)[2]

Az egyenlőtlenségek felsorolt tulajdonságai lényegében akkor is érvényesek, ha az egyenlőtlenség jele mellett az egyenlőség jelét is megengedjük. Az $a \geqq b$ reláció (olv.: a nagyobb, vagy egyenlő b) azt jelenti, hogy a nem kisebb, mint b.

Feladatok

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenségek a bennük szereplő betűknek az adott feltételeket kielégítő, de egyébként tetszőleges választása esetén fennállnak. (Triviális egyenlőtlenségek.)[3]

1. Ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, és $a \leqq b$

akkor $a \leqq \frac{a+b}{2} \leqq b$

(„Számtani közép".)

[1] Az egyenlőség *szimmetrikus*, azaz ha $a = b$, akkor $b = a$.

[2] Ha a és b különböző előjelűek, a reciprok értékekre való áttérésnél az egyenlőtlenség iránya nem változik.

[3] A triviális egyenlőtlenségeknek az egyenlőségek körében az azonosságok felelnek meg. L.: lábjegyzet a 17. oldalon.

Igazolás. Ha $a = b$, akkor az egyenlőségi jelek érvényesek. Ha $a < b$, akkor

$$\frac{a+b}{2}\text{-t}$$

csökkentjük, ha b helyébe a nálánál kisebb a-t írjuk, viszont növeljük, ha a helyébe a nálánál nagyobb b-t írjuk.

Tehát

$$\frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a$$

és

$$\frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

Tehát

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

2. Ha

$$a \geqq 0, \qquad b \geqq 0 \qquad \text{és} \qquad a \leqq b,$$

akkor

$$a \leqq \sqrt{ab} \leqq b$$

(„Mértani közép".)

3. Ha

$$a \geqq 0, \qquad \text{és} \qquad b \geqq 0,$$

akkor

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

Igazolás. Ha $a = b$, akkor az egyenlőségi jel áll fenn. Ha $a \neq b$, akkor például $a > b$, azaz $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, tehát $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Négyzetre emelve: $a + b - 2 \cdot \sqrt{ab} > 0$, ahonnan

$$a + b > 2\sqrt{ab} \text{ és } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

4. Ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

5. Ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor

$$\sqrt{a+b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

6. Ha $x > 0$, akkor

$$1 + \frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

7. Ha $b > 0$, $d > 0$ és $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$,

akkor

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

b) Egyismeretlenes egyenlőtlenségek

Ha $f(x)$ az x ismeretlennek és kontansoknak valamilyen adott kifejezése, akkor $f(x) > 0$ vagy $f(x) < 0$ egyismeretlenes egyenlőtlenség. Itt a feladat az, hogy meghatározzuk x mindazon értékeit, melyekre az egyenlőtlenség teljesül. Míg az egyismeretlenes egyenleteknél a megoldások száma rendszerint véges, vagy ha végtelen, az egyenlet gyökei egy „elszigetelt" összességet alkotnak, addig az ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenségeknek eleget tevő x értékek a valós számoknak egy vagy több „folytonos", „kontinuumnyi" sokaságot képező összessége, feltéve, hogy az egyenlőtlenségnek egyáltalán van megoldása.

Ezen egyenlőtlenségek közül legfontosabbak az *elsőfokúak*. Az előbbi pontban ismertetett tulajdonságok felhasználásával, az elsőfokú egyenletekhez hasonló módon, könnyen megoldhatók.

Példa:

Vizsgáljuk meg, hogy mely számok elégítik ki a

$$17 - 5x > 3x + 1$$

egyenlőtlenséget.

Rendezve

$$-5x - 3x > 1 - 17,$$

majd összevonva

$$-8x > -16$$

Ha most (-8)-cal osztunk, az egyenlőtlenség iránya megváltozik, és kapjuk, hogy

$$x < 2$$

A szóban forgó egyenlőtlenséget tehát az összes 2-nél kisebb valós számok elégítik ki.

Másod- (és magasabb-) fokú egyenlőtlenségeket lineáris tényezőkre való bontással elsőfokúakra vezethetünk vissza, feltéve, hogy a felbontás egyáltalán lehetséges.

Példa:

Mely x-ekre teljesül az

$$x^2 - 2x > 0$$

egyenlőtlenség?

A bal oldal két lineáris tényező szorzatára bontható:

$$x(x - 2) > 0$$

Ám egy szorzat csak akkor pozitív, ha mindkét tényezője megegyező előjelű. Így tehát két eset lehetséges:

I. $\begin{cases} x > 0 \text{ és} \\ x - 2 > 0, \text{ ahonnan } x > 2 \end{cases}$

A két feltétel együtt a 2-nél nagyobb számokra teljesül.

II. $x < 0$ és

$x - 2 < 0$, ahonnan $x < 2$

E két feltétel együtt csak a negatív számokra teljesül. Így a szóban forgó egyenlőtlenséget egyrészt az összes negatív szám, másrészt az összes 2-nél nagyobb pozitív szám elégíti ki.

Hasonló eljárással meggyőződhetünk róla, hogy az

$$x^2 - 2x < 0$$

egyenlőtlenségnek a 0-nál nagyobb és 2-nél kisebb számok tesznek eleget, azaz mindazon x-ek, melyekre nézve

$$0 < x < 2$$

A számoknak egy ilyen „folytonos" összességét *„intervallum"*-nak nevezzük. Ha az intervallum végpontjai nem tartoznak az intervallumhoz: *„nyílt"*, ha hozzátartoznak: *„zárt"* intervallum a neve.

Az $x^2 - 2x < 0$ egyenlőtlenség megoldása a (0,2) nyílt intervallum. Könnyen belátható, hogy az $x^2 - 2x \leqq 0$ (vegyes) egyenlőtlenség megoldása a [0,2] zárt intervallum.

A nyílt és a zárt intervallumok mellett beszélhetünk egyik oldalról nyílt, másik oldalról zárt intervallumról is. Így pl. a $0 \leqq x < 2$ intervallum balról zárt (tehát a 0 az intervallumhoz tartozik), míg jobbról nyílt (azaz 2 már nem tartozik az intervallumhoz).

Példáinkból megállapíthatjuk, hogy valamely egyenlőtlenségnek, feltéve, hogy van megoldása, nyílt vagy zárt intervallumok tesznek eleget.

Feladatok

Mely intervallumok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. $3 - x < 4 - 2x$
2. $3 - x > 4 - 2x$
3. $3 - x \leqq 4 - 2x$
4. $3 - x \geqq 4 - 2x$
5. $2x - 17 \leqq 13 + 6x$
6. $x^2 - 5x + 6 < 0$
7. $x^2 - 5x + 6 > 0$
8. $x^2 - 5x + 6 \leqq x$
9. $x^2 - 5x + 6 \geqq 0$
10. $x^2 - 6x + 5 \geqq 0$
11. $3x^2 - 10x + 3 \geqq 0$
12. $6x^2 - 13x + 6 \leqq 0$
13. $x^2 - x > 0$
14. $x^3 - x < 0$
15. $x^3 - x \geqq 0$
16. $x^3 - x \leqq 0$
17. $x^3 + x > 0$
18. $x^3 + x < 0$
19. $x < \frac{1}{x}$

Megjegyzés x-et tartalmazó kifejezéssel nem szabad szorozni, mert nem tudhatjuk, hogy annak mi az előjele. (Negatív előjel esetén az egyenlőtlenség iránya megváltozik.) Ezért 0-ra redukálunk és közös nevezőre hozunk:

$$x - \frac{1}{x} < 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} < 0$$

Ám egy tört akkor negatív, ha számlálója és nevezője különböző előjelűek. Így két eset adódik:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \text{II.} \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

I.-ből $0 < x < 1$; II.-ből $x < -1$

megoldások adódnak.

20. $\dfrac{1}{1-x} < 1 + 2x$

21. $1 + x < \dfrac{1}{1-x}$

22. $\dfrac{1}{1-x} \leqq 1 - \dfrac{x}{2}$

23. $\dfrac{2x-1}{3-2x} < 2$

24. $\dfrac{1}{3} < \dfrac{2x-1}{3-2x} < \dfrac{1}{2}$

c) Abszolút érték

Valamely a szám abszolút értéke, ha $a \geqq 0$, maga az a szám; ha viszont $a < 0$, akkor a abszolút értéke a: $-a$ pozitív szám.

Az a szám abszolút értékének jelölése: $|a|$

Írhatjuk tehát:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geqq 0 \\ -a, & \text{ha } a \leqq 0 \end{cases}$$

(Geometriailag $|a|$ jelenti a számegyenes a koordinátájú pontjának távolságát az origótól.)

Fenti értelmezésből következik, hogy $|a| = 0$ akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = 0$. Minden más esetben, midőn tehát $a \neq 0$, $|a| > 0$; és $|a| = |-a|$. Fennáll továbbá, hogy $|ab| = |a| \cdot |b|$, azaz: szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékeinek szorzatával és $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, ha $b \neq 0$, azaz tört abszolút értéke a számláló és nevező abszolút értékeinek hányadosával egyenlő (feltéve, hogy a nevező zérustól különböző).

Kimutatható még, hogy

$$\Big|\,|a| - |b|\,\Big| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|,$$

ahol a és b tetszőleges valós számok.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy $|a|^2 = a^2$, ha a valós szám!
2. Igazoljuk, hogy $|x - a| = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2}$, ha x és a valós számok!
3. Határozzuk meg $\dfrac{a + |a|}{2}$ értékét, ha $a \geqq 0$ és ha $a \leqq 0$.
4. Határozzuk meg $\dfrac{a - |a|}{2}$ értékét, ha $a \geqq 0$ és ha $a \leqq 0$

5. Határozzuk meg azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < 0{,}1$$

6. Igazoljuk, hogy

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqq \sqrt{|a-b|} \qquad \text{ahol} \qquad a, b \geqq 0$$

Igazolás:

A) Ha $a = b$, mindkét oldal zérus,

B) Ha $b = 0$, $a \neq 0$, egyenlőség áll fenn.

C) Ha $a \neq b$ és mindkét szám zérustól különböző, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > b$. (Ellenkező esetben a és b-t felcserélve, az abszolút értékek miatt visszajutunk az $a > b$ esethez.) De ekkor az abszolútérték jeleket elhagyhatjuk, mert $a - b > 0$ és $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Kimutatjuk, hogy

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$$

Ámde

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a - b + 2b - 2\sqrt{ab}} =$$

$$= \sqrt{a - b + 2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})} < \sqrt{a-b},$$

mert $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ negatív és $\sqrt{b}$ pozitív.

7. Mely valós x számok tesznek eleget az

$$|x| < 1$$

egyenlőtlenségnek?

Megoldás: Ha $x \geqq 0$, akkor $|x| = x < 1$.

Ha $x < 0$, akkor $|x| = -x < 1$, tehát $x > -1$.

Tehát az egyenlőtlenséget a $-1 < x < 1$ nyílt intervallum számai elégítik ki.

8. Mely valós x-ekre teljesül a

$$|2 - x| < 0{,}3$$

egyenlőtlenség?

A fentiekhez hasonló okoskodással nyerjük a megoldást:

$$2 - 0{,}3 < x < 2 + 0{,}3$$

Ezt az intervallumot, mely a 2-es számtól balra is meg jobbra is 0,3 távolságra nyúlik, a 2-körüli *0,3 „sugarú" környezetnek* nevezzük. E környezetbe tartozó számok a 2-től abszolút értékben kevesebbet különböznek, mint *0,3*.

9. Mit jelent az

$$|a - x| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség?

10. Mely x-ekre teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $|x - 2| < 3$ *b)* $\left|\frac{1}{x-1}\right| > 0{,}5$ *c)* $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$

5. §. GEOMETRIA

A műszaki feladatok sok esetben geometriai kérdésekkel függnek össze. Ez természetes is, mert a geometria, mint azt a neve is mutatja (földmérés), gyakorlati problémákból indult ki és oda sűrűn vissza is tér. A szóban forgó műszaki feladatok *idomok* és *testek* alkotórészeinek (oldalak, szögek stb.), ill. azok kerületének, területének, felszínének, térfogatának kiszámításával kapcsolatosak.

A síkidomokra vonatkozó kérdéseket a *planimetria* és a *trigonometria*, a testekkel összefüggő problémákat a *stereometria* tárgyalja. A planimetria az oldalak és szögek közti kapcsolatokat csak kvalitatíve, míg a trigonometria kvantitatív módon, azaz egyenletek formájában tárja fel és így a számítás részére hozzáférhetővé teszi.

a) Planimetria

Az egyenes darabokkal (vagy mint mondani szokás: szakaszokkal) határolt (sík-) idomokat s o k s z ö g e k n e k nevezzük. Ezek közül legfontosabb a *háromszög*, mert a többi sokszög átlók segítségével háromszögekre bontható. A háromszögek közül ki kell emelnünk a *derékszögű* háromszögeket; ezek egyrészt számítási szempontból igen egyszerűen kezelhetők, másrészt minden más (általános) háromszög valamelyik magassági vonala segítségével két derékszögű háromszögre bontható fel.

A görbe vonalakkal határolt idomok közül gyakorlati szempontból legjelentősebb a körlap, körcikk és körszelet.

Az idevágó számítási feladatokhoz szükséges legfőbb tudnivalókat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

1. A szögeket ($\alpha, \beta, \ldots$) fokokban (törtrészei: perc, másodperc), vagy ívmértékben (radián; arcus; az r sugarú körben a középponti szöghöz tartozó körív hossza osztva a kör sugarával) mérjük:

$$\alpha_{radián} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

2. Bármely háromszög szögeinek összege 180°.

3. A háromszögben bármely külső szög egyenlő a szemközti belső szögek összegével.

4. Az egyenlőoldalú háromszög szögei 60°-osak.

5. Az egyenlőszárú háromszögnek (az alapon fekvő) két szöge egyenlő.

6. A derékszögű háromszög hegyesszögei pótszögek, azaz egymást 90°-ra egészítik ki.

7. A körben bármely kerületi szög fél-akkora, mint az ugyanazon íven nyugvó középponti szög.

8. A kör valamely pontját összekötve egy átmérő végpontjaival, derékszögű háromszöget kapunk. (Thales-tétel.)

9. Két háromszög hasonló, ha szögeik egyenlők, amiből a megfelelő oldalak arányának egyenlősége következik.

10. Bármely derékszögű háromszögben $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$, ahol a, b befogók, c átfogó. (Pythagoras-tétel.)

11. A 30°-os (vagy 60°-os) derékszögű háromszögben a kisebbik befogó fele az átfogónak.

12. A kör kerülete: $\boxed{k = 2r\pi}$; területe: $\boxed{t = r^2\pi}$;

az α_r középponti szöghöz tartozó körív hossza:

$$\boxed{i = r \cdot \alpha_r} \qquad (\alpha_r \text{ ívmértékben kifejezve});$$

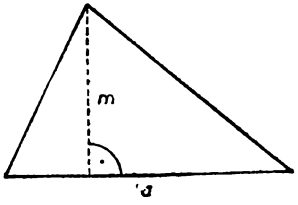
a körcikk területe: $$\boxed{t = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{r^2 \cdot \alpha_r}{2}}$$

13. A sokszögek kerülete az oldalak összegével egyenlő.

14. A háromszögek és négyszögek területe:

Általános háromszög:

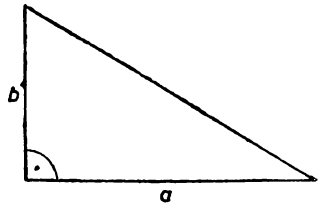
$$t = \frac{a \cdot m}{2}$$



1. ábra

Derékszögű háromszög:

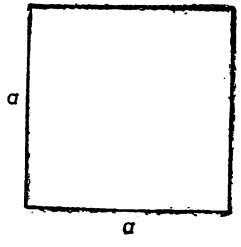
$$t = \frac{ab}{2}$$



2. ábra

Négyzet:

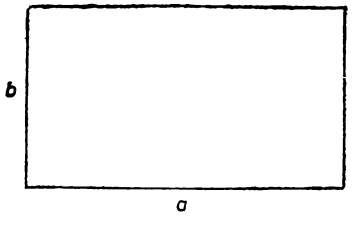
$$t = a^2$$



3. ábra

Téglalap:

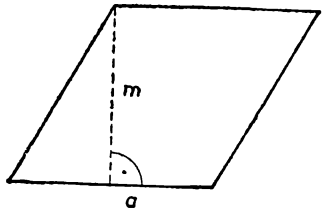
$$t = ab$$



4. ábra

Rombusz:

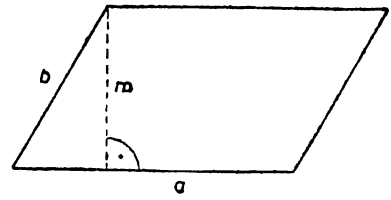
$t = a \cdot m$



5. ábra

Romboid:

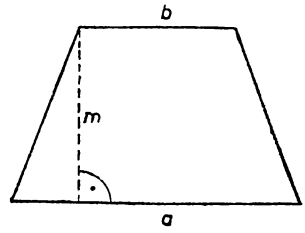
$t = a \cdot m$



6. ábra

Trapéz:

$$t = \frac{a+b}{2} m$$



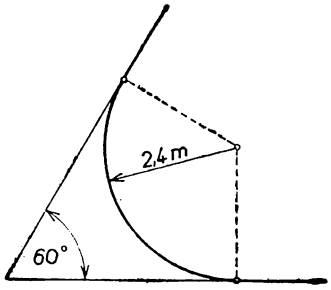
7. ábra

Feladatok

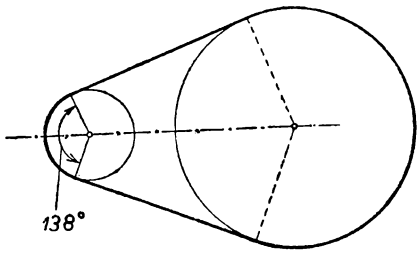
1. Határozzuk meg 40°; 24°38′; 1110° szögek ívmértékét!
2. Határozzuk meg a következő ívmértékben adott szögek mérőszámát fokokban:

$$\frac{10\pi}{9}; \quad \frac{1}{2}; \quad 7; \quad 0{,}01!$$

3. Hány fokos szöget alkotnak az óramutatók 3 óra 40 perckor?
4. Hány fokos szögeket zár be a körbeírt szabályos hatszög egyik csúcsából rajzolt átmérő a szomszédos csúcsból rajzolt átlókkal?
5. Ugyanaz a feladat szabályos nyolcszög esetén.
6. Valamely 4 m hosszú palló 2 m magasra vezet. Mekkora szöget zár be a palló a vízszintessel és milyen hosszú a pallónak a vízszintes síkra való vetülete?
7. Mekkora utat tesz meg a 2 m kerékátmérőjű mozdony, miközben a kerék egy teljes fordulatot tesz? (Csúszás nincs!)
8. Percenként hány fordulatot tesz a vasúti kocsi 850 mm átmérőjű kereke, ha a vonat 80 km/óra sebességgel halad?
9. Egy dugattyúgyűrű külső kerülete 376,8 mm, belső kerülete 345,4 mm. Mekkora a falvastagsága?
10. Egy ferde saroktelek két oldala 60°-os szöget képez. Lekerekítették érintőlegesen 2,40 m sugarú körívvel. Mekkora e körív hossza? (8. ábra.)
11. Egy áttétel két szíjtárcsájának átmérője 12 cm, ill. 32 cm. A szíj a kisebbik tárcsán 138°-os íven tapad. Mekkora a súrlódási felület hossza mindkét tárcsán? (9. ábra.)



8. ábra



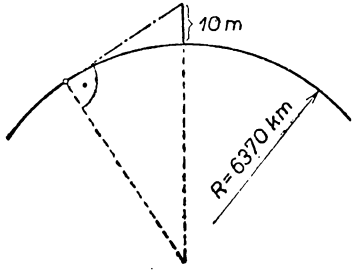
9. ábra

12. Mekkora átmérőjű csövet kell alkalmaznunk sűrített levegő vezetésére, ha az 100 cm^2 keresztmetszetet igényel?

13. Mekkora a keresztmetszete egy 85 cm vastag fának?

14. Egy öntöttvascső külső átmérője 120 mm, falvastagsága 9 mm. Mekkora a belső keresztmetszete?

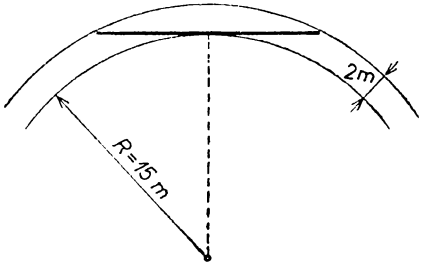
15. Milyen messzire láthatunk el egyenletes terepen 10 m magasról? (A föld sugara 6370 km. (10. ábra.)



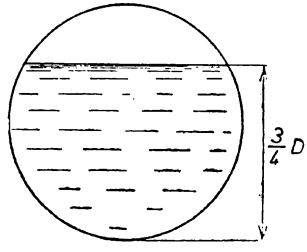
10. ábra

16. Milyen hosszú rudat lehet vízszintesen szállítani a 15 m belső görbületi sugarú bányavágatban, ha a vágat szélessége 2 méter és a rúd szélessége elhanyagolható? Mekkora lehet a rúd hossza, ha szélessége 40 cm? (11. ábra.)

17. Egy vízszintesen elhelyezett $r = 10$ cm sugarú hengeres cső függőleges átmérőjének $\frac{3}{4}$ részéig van vízzel töltve. Mekkora a vízzel töltött keresztmetszet? (12. ábra.)

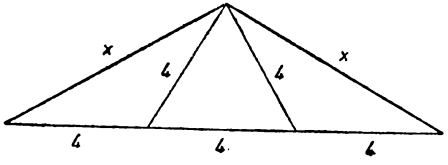


11. ábra

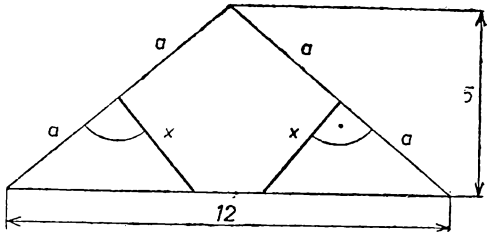


12. ábra

18. A berajzolt rácsos tetőszerkezetek adott méreteiből számítsuk ki az egyes gerendák hosszát (13. és 14. ábra.)



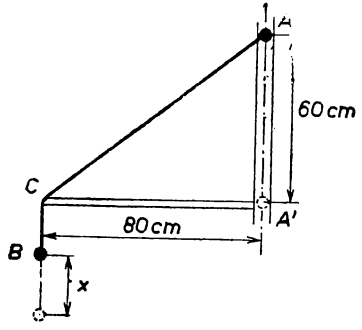
13. ábra



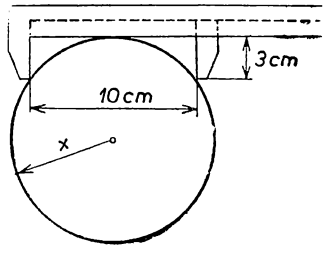
14. ábra

19. Az A golyó az AA' függőleges sínen A'-be jut. Mennyit süllyed ezalatt a vele ABC kötéllel összekötött B golyó, ha $AA' = 60$ cm és $A'C = 80$ cm? (Az $A'C$ rúd rögzítve van.) (15. ábra.)

20. Tolómérővel csak a henger 10 cm hosszú húrját tudtuk mérni, mert a mutató 3 cm-es hossza kisebb a sugárnál. Mekkora a henger sugara? (16. ábra.)



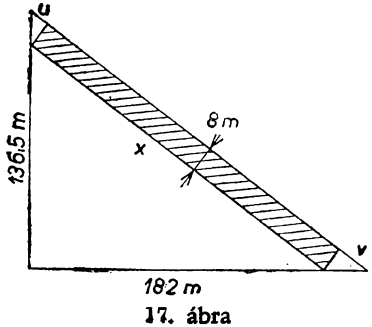
15. ábra



16. ábra

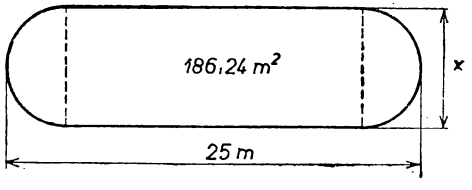
21. Derékszögű háromszög alakú telek két befogója 136,5 m és 182 m. Az átfogó mentén 8 m széles gazdasági épületet akarunk emelni. Legfeljebb milyen hosszú lehet az épület? (17. ábra.)

22. Mekkora átmérőjű körlemezből lehet legkisebb veszteséggel egy 8 cm oldalú négyzetlemezt kivágni?



17. ábra

23. Egy téglaégető kemence alaprajza: egy téglalap és rövidebb oldalain egy-egy félkör. A kemence hossza 25 m, területe 186,24 m². Mekkora a kemence szélessége? (18. ábra.)

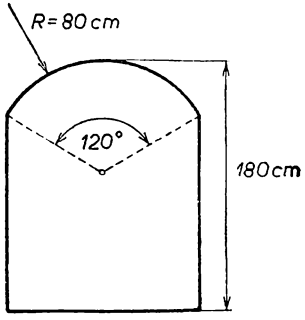


18. ábra

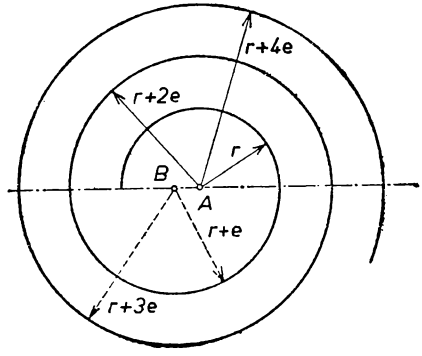
24. Egy trapéz alakú lemez párhuzamos oldalai 20 cm, ill. 30 cm; magassága 23,2 cm. Az alappal párhuzamosan, attól mekkora távolságban kell a lemezt elvágni, ha azt akarjuk, hogy a kapott két lemez egyenlő területű legyen?

25. Határozzuk meg az ábrán feltüntetett boltíves kapu keresztmetszetét! (19. ábra.)

26. Egy spirális két, az A és B pontok körüli koncentrikus félkörökből áll. A legbelső félkör sugara $r = 1{,}5$ cm; centrumtávolság $AB = e = 0{,}5$ cm. Milyen hosszú a spirális, ha az 22 félkörből áll? (20. ábra.)



19. ábra



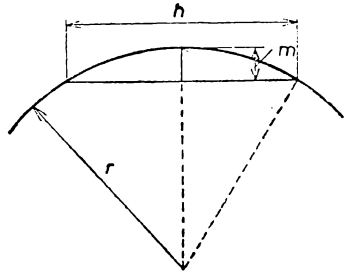
20. ábra

27. Mekkora a távirdaszalag hossza, ha vastagsága $m = 0{,}2$ mm, a tekercs belső sugara $r = 2$ cm, külső sugara $R = 9$ cm?

28. Körívben húzódó vasúti pálya görbületi sugarának meghatározása végett egy h hosszúságú húr felezőpontjában emelt merőlegesnek a pályáig terjedő hosszát (m) mérjük meg. Mekkora a görbületi sugár? (r) (21. ábra).

Numerikus értékek: $h = 100$ m;

$m = 2$ m.

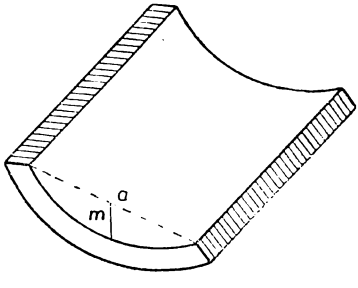


21. ábra

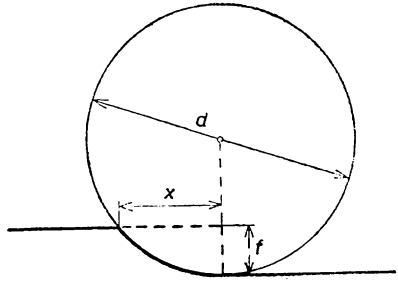
29. Egy összetört körgyűrűnek csak egy darabját kaptuk meg, melynek alapján új készítendő. Megmérhetők az a és m távolságok. Mekkora a görbületi sugár? (22. ábra.)

30. Egy síkdomború lencse átmérője d és vastagsága m. Mekkora a görbületi sugara?

31. Mekkora a tárcsamaró felfutási hossza, ha a maró átmérője d, és a fogásmélység f? (23. ábra.)



22. ábra

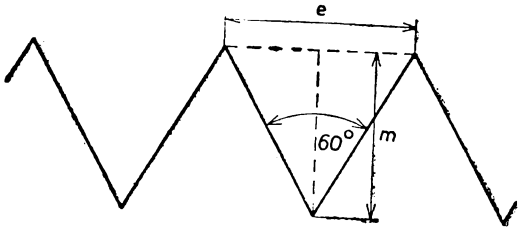


23. ábra

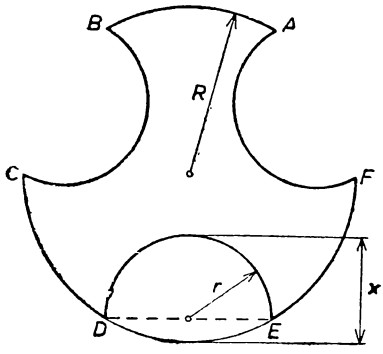
32. e emelkedésű metrikus menetet (a menet szöge 60°) kell készíteni. Mekkora a menet mélysége: m? (24. ábra.)

33. Adva van a metrikus menet mélysége m. Mekkora a menet emelkedése e?

34. Elkészítendő a rajz szerinti idomszer. Az A, B, C, D, E, F pontok az R sugarú körön egy szabályos hatszög csúcsai. A hatszög minden második oldala bemarandó úgy, hogy a mart ív félkör legyen. Mekkora a félkör sugara: r és a rajzon feltüntetett x távolság, ha R adva van? (25. ábra.)



24. ábra



25. ábra

b) Trigonometria

A trigonometria feladata, hogy a háromszög szögei és oldalai között összefüggéseket állapítson meg abból a célból, hogy az ismert alkotórészekből az ismeretleneket vagy a háromszög területét kiszámíthassuk.

A sokszögekre vonatkozó hasonló tárgyú feladatok mindig visszavezethetők háromszögek megoldására, mert minden sokszög átlói segítségével háromszögekre bontható.

Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt a derékszögű háromszög trigonometriája a legfontosabb, mert az általános háromszöget bármelyik magassági vonala két derékszögű háromszögre bontja. A gyakorlatban előforduló legtöbb ilyen tárgyú feladat közvetlenül derékszögű háromszögekkel függ össze.

α) A derékszögű háromszög megoldása. A derékszögű háromszöget megoldani annyit jelent, mint a háromszög megadott alkotórészeiből a meg nem adott alkotórészeket kiszámítani. Miután — mint ismeretes — a derékszögű háromszög körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, ha *adva van két oldala,* avagy *egyik oldala és egyik hegyesszöge,* várható, hogy ezen esetekben a többi alkotórész számítással is meghatározható.

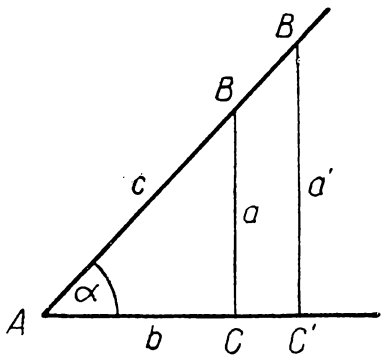
Ha ismeretes két oldal, a harmadik *Pythagoras-tételével* számítható.

Ha ismeretes egyik hegyesszög, a másik meghatározható, mert *a két hegyesszög összege* 90°. (A harmadik szög pedig 90°.)

A többi alkotórész kiszámítása *„szögfüggvények"* segítségével történik.

A hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése. Valamely α hegyesszög szögfüggvényértékeit ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;

olv.: szinusz α, koszinusz α, tangens α, kotangens α, szekáns α, koszekáns α) a következő módon értelmezzük: (l.: a 26. ábrát!)



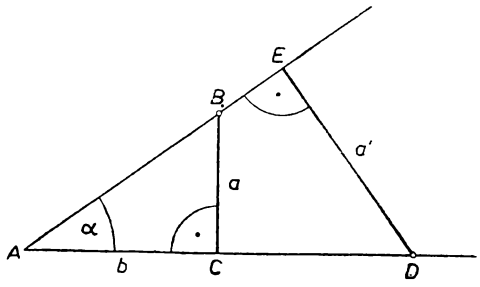
26. ábra

A szög egyik szárán felveszünk egy tetszőleges B pontot. Ebből merőlegest bocsátunk a másik szárra. (A merőleges talppontja legyen C). A nyert derékszögű háromszög oldalainak (a, b, c) arányai:

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}$$

dimenzió nélküli számok és függetlenek a B pont helyének választásától. Mert ha a B pont helyett a B' pontból bocsátunk merőlegest a másik szárra (talppont C'), a kapott $AB'C'$ háromszög és az előbbi ABC háromszög hasonlóak (mert szögeik egyenlők) és ezért az oldalak aránya is megegyezik. Tehát pl.

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \text{ stb.}$$



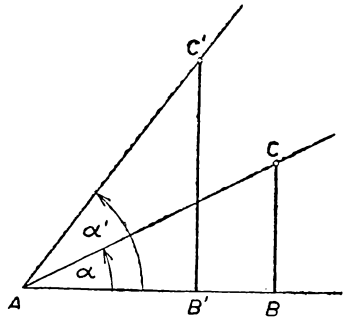
27. ábra

De az oldalak aránya attól sem függ, hogy melyik szárról bocsátunk merőlegest a másikra, mert (l. 27. ábrát) az ABC és ADE háromszögek is hasonlóak (egyik szögük közös és mindkettő derékszögű háromszög), tehát a megfelelő oldalak aránya megegyezik. (Megfelelő oldalak azok, melyek egyenlő szögekkel fekszenek szemben.) Az oldalarányok tehát függetlenek attól, hogy melyik szár melyik pontjából bocsátunk merőlegest a másikra. Könnyen belátható azonban, hogy az oldalarányok az α szög nagyságától függnek. Ha pl. $\alpha' > \alpha$ és $\overline{AC'} = \overline{AC}$, akkor $\overline{B'C'} > \overline{BC}$ tehát

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC'}} > \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

(l.: a 28. ábrát!) Viszont ugyanakkor

$$\overline{AB'} < \overline{AB} \quad \text{és így} \quad \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



28. ábra

És így tovább! Ezek után az α hegyesszög szögfüggvényértékeit a következő módon értelmezzük:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{átfogó}}{\alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{átfogó}}{\alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}$$

A hegyesszögek szögfüggvényértékeinek számítása fenti definíciók alapján hosszmérésekre vezethető vissza. Az így meghatározott értékek azonban — a hosszmérések pontatlansága folytán — csak korlátolt pontosságúak.

A későbbi fejezetekben (l.: A. VIII.) megismerkedünk a szögfüggvényeknek egy másik, tisztán matematikai („hatványsorok"-kal történő) definíciójával. Ennek segítségével a szögfüggvényértékek tetszőleges pontossággal kiszámíthatók. Az így nyerhető értékeket, a különböző pontossági igényeknek megfelelően, 3, 4, 5, 7 és 10 tizedes jegyet tartalmazó táblázatokba foglalják.[1]

[1] A szögfüggvények tulajdonságaira nézve l.: a Goniometria c. fejezetet, 74. old.

Szögfüggvénytani táblázatok birtokában és felhasználva a szögfüggvények definíciójául szolgáló összefüggéseket $\left(\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} \ldots \text{ stb.}\right)$, a derékszögű háromszög bármely alkotórésze számítható, ha adva van valamelyik oldala és egyik hegyesszöge; vagy adva van bármely két oldala.

Példák

1. A derékszögű háromszög egyik befogója $a = 5$ dm. E befogón fekvő hegyes szöge $\beta = 42°$. Mekkora a többi alkotórésze?

Megoldás: A másik hegyesszög β-nak pótszöge, azaz $\alpha = 48°$. Most számítsuk ki az átfogót. Mivel

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

ezért

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 48°} = \frac{5}{0{,}7431} = 6{,}73 \text{ dm}.$$

A még hiányzó b befogót akár Pythagoras-tételével, akár valamelyik szögfüggvény, pl. tg-függvénnyel számíthatjuk. Így

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

ahonnan

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{\operatorname{tg} 48°} = \frac{5}{1{,}1106} = 4{,}5 \text{ dm}.$$

2. A derékszögű háromszög befogói 35, ill. 27 cm hosszúak. Mekkora a kisebbik hegyesszöge?

Megoldás: Ha a keresett szöget α-val jelöljük, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{27}{35} = 0{,}7714, \quad \text{és} \quad \alpha = 37°39'$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a derékszögű háromszög hiányzó oldalait és szögeit a következő adatokból (c az átfogó):

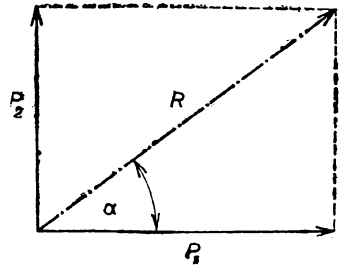
a) $a = 16$;	$b = 63$.	*b)* $a = 9$;	$c = 15$.
c) $a = 4{,}8462$;	$\alpha = 75°45'$.	*d)* $c = 14$;	$\alpha = 53°7'48''$.

2. Egy út emelkedése 20%-os. (Azaz vízszintesen mért 100 m-en 20 m-t emelkedik.) Hány fokos az emelkedési szög?

3. $P_1 = 40$ kgs és $P_2 = 30$ kgs erők merőlegesek egymásra. Mekkora az R eredőjük és mekkora szöget alkot ez P_1-gyel? (29. ábra).

4. 1 m-es bot árnyéka 70 cm. Mekkora szöget alkotnak a nap sugarai a vízszintessel?

5. Az országút egyik pontjából 32° hajlással 4,8 km hosszú ösvény vezet egy településhez. Ezt a legrövidebb úttal akarják bekötni az országúthoz. Milyen hosszú lesz a bekötő út?



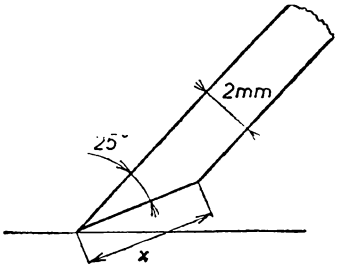
29. ábra

6. Egy tárna bejáratához 28°-os emelkedő visz fel, amely 2,4 km hosszú. Milyen magasságban van a tárna bejárata az emelkedő alja felett?

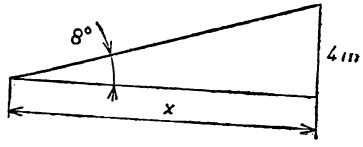
7. Milyen hosszú az a drótkötélpálya, amely 50 fokos emelkedési szöggel 140 m magasra visz? (A belógásokat nem vesszük figyelembe.)

8. Egy gyalukés 2 mm vastag; élszöge 25°. Milyen hosszú a gyalukés éle? (30. ábra)

9. Milyen x távolságban kezdődik az a hídfeljáró, amely 8°-os emelkedéssel 4 m magasra visz? (31. ábra.)



30. ábra



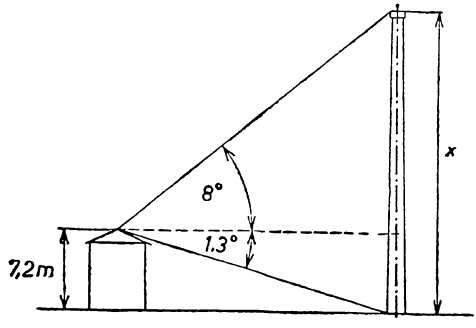
31. ábra

10. Egy csavar átmérője 53 mm. A csavarmenet emelkedési szöge 4,5°. Milyen magas egy csavarmenet? (Rajzoljunk egy csavarmenetet síkban kiterítve!)

11. Két út egymással 38 fokos szöget alkot. A hegyes kereszteződést 8 m sugarú körívvel kerekítjük le. A kereszteződéstől milyen x távolságra kezdődik az ív?

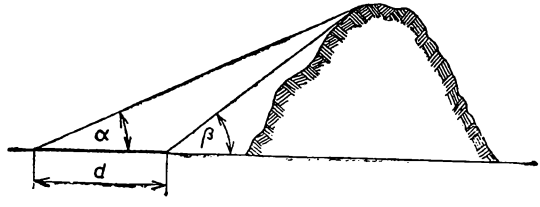
12. Egy esztergályozott csonkakúp magassága 52 mm; felső átmérője 18 mm, az alsó 32 mm. Mekkora a fél kúpszög? (A kiegészítő kúp csúcsánál levő szög fele.)

13. Egy gyárkémény talapzatát egy 7,2 m magas háztetőről $\alpha = 1{,}3°$-os depresszió-szög alatt, a gyárkémény csúcsát $\beta = 8°$-os emelkedési szög alatt látni. Milyen magas a kémény? (32. ábra.)



32. ábra

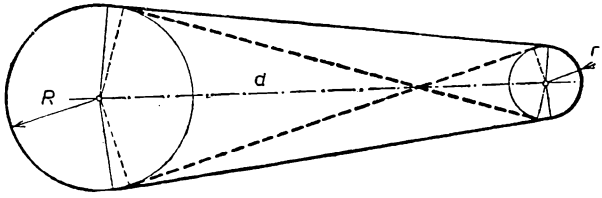
14. A hegy csúcsának emelkedési szöge $\alpha = 32°47'$. Ha $d = 132$ m-rel közelebb megyünk hozzá vízszintes úton, az emelkedési szög $\beta = 37°26'$. Milyen magas a hegy? (33. ábra.)



33. ábra

15. Két szíjtárcsa sugara $R = 25$ cm és $r = 10$ cm. Középpontjuk távolsága $d = 120$ cm. Elméletileg milyen hosszú szíjra van szükség *a)* egyenes; *b)* keresztezett szíjhajtás esetén? Oldjuk meg a feladatot, ha

$$r = \frac{R}{2} \quad \text{és} \quad d = 2R. \qquad \text{(l. a 34. ábrát)}$$

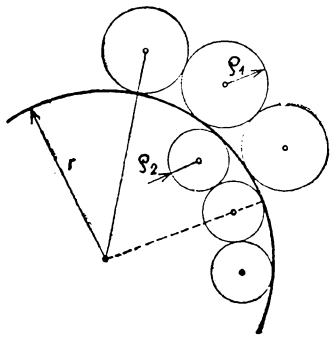


34. ábra

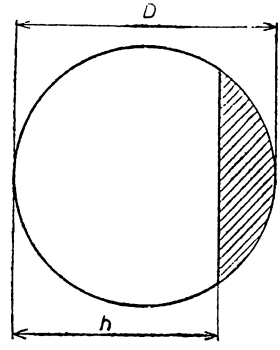
16. Az $r = 12$ cm sugarú kör kerületén kívülről (belülről) $n = 18$ db, egyenként ϱ sugarú érintőkört kell elhelyezni (golyóscsapágy). Mekkora ϱ, kifejezve r és n segítségével? (35. ábra.)

17. Legfeljebb mekkora sugarú körlemezt tudunk kivágni egy $r = 12$ cm sugarú, $\alpha = 50°$ középponti szögű körcikkből?

18. Egy $D = 80$ mm átmérőjű korongból a vonalkázott részt lereszeljük úgy, hogy $h = 70$ mm legyen. Hány százalék a hulladék? (36. ábra.)



35. ábra



36. ábra

β) Az általános háromszög megoldása. Az általános háromszöget a következő 3—3 alkotórész egyértelműen meghatározza: (ezen adatokból a háromszög körzővel és vonalzóval megszerkeszthető).

1. Egy oldal és két szög.
2. Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög.
3. Két oldal és az általuk bezárt szög.
4. Három oldal.

Az általános háromszög bármely négy alkotórésze között van összefüggés. A két legfontosabb:

a *sinus-tétel*[1]: $\boxed{a : b = \sin\alpha : \sin\beta}$ és

a *cosinus-tétel* $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

Az 1. és 2. esetben a sin-tétel, a 3. és 4. esetben a cos- és sin-tétel alkalmazásával oldjuk meg a háromszöget.

A háromszög területét a $t = \frac{a \cdot m}{2}$ formulán kívül a következő módon is számíthatjuk:

$$t = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}; \quad t = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}; \quad t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ahol

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Példák

1. Az általános háromszög egyik oldala $c = 52$ cm, ezen az oldalon fekvő szögei $\alpha = 22°37'$, $\beta = 30°31'$. Számítandó a többi alkotórész.

Megoldás: Előbb kiszámítjuk a harmadik szöget. Így

$$\gamma = 126°52'$$

Most a sin-tétellel számítsuk ki az „a"-oldalt.

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{52 \cdot \sin 22°37'}{\sin 126°52'}$$

Figyelmeztetés: $\sin 126°52' = \sin(180° - 126°52') = \sin 53°8'$

A számításokat logaritmussal végezzük:

$$\begin{aligned} \log 52 &= 1{,}7160 \\ \log \sin 22°37' &= 9{,}5849 - 10 \\ &\underline{\quad 11{,}3009 - 10} \\ -\log \sin 53°8' &= -9{,}9031 \mp 10 \\ \log c &= 1{,}3978 \\ c &= 25 \end{aligned}$$

[1] A sin-tétel általánosabban így írható: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ vagy $a = \lambda \sin\alpha$, $b = \lambda \sin\beta$, $c = \lambda \sin\gamma$, ahol λ arányossági tényező, és geometriailag a háromszög csúcsain átmenő kör átmérőjét jelenti.

Végül számítandó a „b" oldal (újból a sin-tétel alkalmazásával):

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{52 \cdot \sin 30°31'}{\sin 52°8'}$$

$$\begin{aligned} \log 52 &= 1{,}7160 \\ + \log \sin 30°31' &= 9{,}7057 - 10 \\ &\quad 11{,}4217 - 10 \\ - \log \sin 53°8' &= -9{,}9031 + 10 \\ \log b &= 1{,}5186 \\ b &= 33 \end{aligned}$$

2. Az általános háromszög egyik oldala $a = 13$ cm, másik oldala $b = 14$ cm és a két oldal által bezárt szög $\gamma = 67°22'48''$

Számítsuk ki a háromszög ismeretlen alkotórészeit.

Megoldása. A c oldalra felírjuk a cos-tételt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = 13^2 + 14^2$$

$$-2 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \cos 67°22'48'' = 169 + 196 - 369 \cdot 0{,}3847 = 225$$

Tehát $c = 15$

(Kényelmesebb lett volna a $2ab \cdot \cos\gamma$ szorzat értékét logaritmussal számolni!)

A még ismeretlen két szög egyikét most már a sin-tétellel számítjuk.

$$\sin\alpha : \sin\gamma = a : c$$

Innen

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{13 \cdot \sin 67°22'48''}{15}$$

A számításokat log-sal végezzük

$$\begin{aligned} \log 13 &= 1{,}1139 \\ \log \sin 67°22'48'' &= 9{,}9652 - 10 \\ &\quad 11{,}0791 - 10 \\ \log 15 &= 1{,}1761 \\ \log \sin\alpha &= 9{,}9020 - 10 \\ \text{tehát } \alpha &= 52°56' \end{aligned}$$

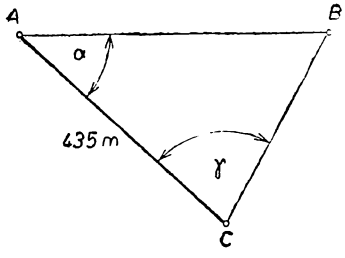
Feladatok

1. Határozzuk meg az általános háromszög ismeretlen oldalait, szögeit és területét a következő adatokból:

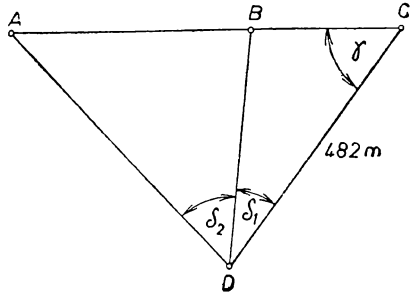
a) $c = 52$;	$\alpha = 22°37'12''$;	$\beta = 30°30'37''$
b) $a = 13$;	$b = 20$;	$\beta = 67°23'$
c) $a = 13$;	$b = 14$;	$\gamma = 67°22'48''$
d) $a = 4$;	$b = 13$;	$c = 15$

2. A megmérendő $\overline{AB}$ távolságnak csak az A pontját tudjuk megközelíteni. Egy tetszőlegesen felvett C pontnak A-tól való távolsága $\overline{AC} = 435$ m. Továbbá $\alpha = 42{,}3°$, $\gamma = 76{,}8°$. Mekkora az $\overline{AB}$ távolság? (37. ábra.)

3. A megmérendő $\overline{AB}$ távolság egyik végpontját sem tudjuk megközelíteni. De meg tudjuk mérni a $\overline{DC} = 482$ m-es távolságot és a $\delta_1 = 35°$, $\delta_2 = 44°$ és $\gamma = 53$ fokos szögeket. Mekkora az $\overline{AB}$ távolság? (38. ábra.)

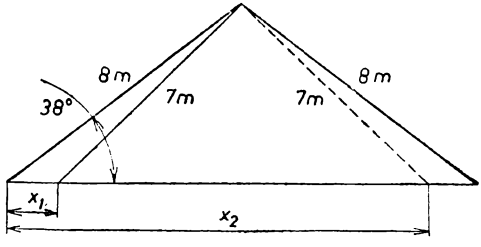


37. ábra



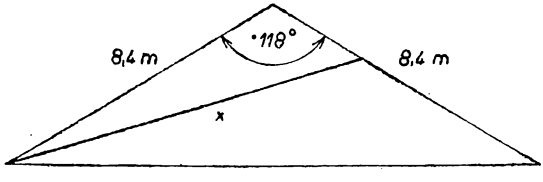
38. ábra

4. Egy 8 m széles tető hajlásszöge 38°. Az eresztől milyen x távolságra éri a födémet a 7 m-es támasztódúc? (Két megoldás!) (39. ábra.)



39. ábra

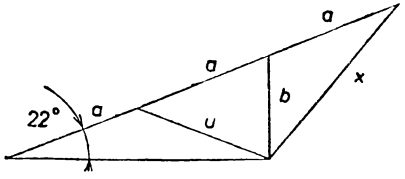
5. Egy csarnoktetőnek a rajzon x-szel jelölt gerendája a 8,40 m széles tetősík ereszvonalától vezet a másik tetősík felső harmadrészéhez. Milyen hosszú ez az x gerenda, ha a tetősíkok hajlásszöge 118°? (40. ábra.)



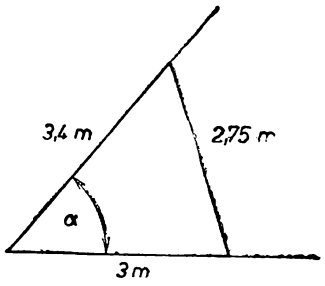
40. ábra

6. Egy rácsos tartó tervrajzán az a-val jelölt méretek hossza 3,8 m; a hajlásszög 22°. Mekkora a b oszlop és az x ferde rácsrúd hossza? (41. ábra.)

7. Mekkora annak a trapéz alakú teleknek a területe, melynek párhuzamos oldalai: 40 m és 8 m; nem párhuzamos oldalai; 32 m és 20,4 m?



41. ábra



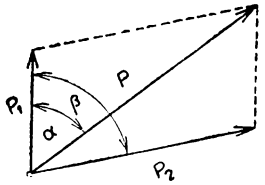
42. ábra

8. A tetőt 3,40 m távolságban támasztja egy 2,75 m hosszú dúc, amely az eresztől 3 m távolságban támaszkodik a födémre. Mekkora a tető hajlásszöge a födémhez? (42. ábra.)

9. A $P_1 = 83$ kgs és $P_2 = 154$ kgs erők eredője $P = 190$ kgs. Mekkorák a P_1, P_2 és a P_1, P erők által bezárt szögek? (43. ábra.)

10. Igazoljuk, hogy bármely általános háromszögben $a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha = c$!

11. Igazoljuk, hogy bármely derékszögű háromszögben $a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = c$!



43. ábra

c) Stereometria

A testekkel kapcsolatos geometriai vizsgálatok a stereometria (térmértan) tárgyához tartoznak.

A csupán (sík-) idomokkal határolt testeket: *szögletes testeknek* (vagy poliédereknek) nevezzük. Ezek közül legfontosabbak: a *hasáb, gúla* és *csonka gúla.* A hasábok közül gyakorlati szempontból legjelentősebb a *kocka* (hat egybevágó négyzetlappal határolt test) és az *egyenes hasáb* (két egybevágó és párhuzamos sokszöggel, valamint annyi téglalappal határolt test, mint ahány oldalú a sokszög). Azt az egyenes hasábot, amelyet hat, páronként egybevágó és párhuzamos téglalap határol, *derékszögű egyenlőközű hatlapnak* (parallelepipedon) nevezzük. A *gúlát* egy sokszög és annyi háromszög határolja, mint ahány oldalú a sokszög. A *csonka gúlát* két párhuzamos és hasonló sokszög, valamint annyi trapéz határolja, mint ahány oldala van a sokszögnek.

A felsorolt szögletes testeken kívül vannak nem csupán síkidomokkal, hanem görbe felületekkel határolt testek is. Legfontosabbak: *henger, kúp, csonka kúp* és *gömb.* Műszaki szempontból mindegyik egyaránt fontos. A hengert két párhuzamos és egybevágó körlap és egy ún. *hengerfelület* határolja. A hengerfelületre jellemző, hogy csupa párhuzamos egyenesből áll s ezért síkra lefejthető. A kúpot egy körlap és egy ún. *kúpfelület* határolja. A kúpfelület csupa egy ponton áthaladó egyenesből áll s ezért szintén síkra lefejthető. A gömböt egy ún. *gömbfelület* határolja. Ennek pontjai egy adott ponttól (a gömb középpontjától) állandó távolságra vannak. A gömbfelület síkra nem fejthető le. (További példákat felületekre lásd A. VI. VII. B. II. alatt.)

A műszaki gyakorlat szempontjából legfontosabb a testek felszínének *(F)* és térfogatának *(K)* kiszámítása. Ezek a számítások általában felsőbb mennyiségtani eszközöket igényelnek (integrálszámítás; lásd: A. IV. és VII. alatt.)

Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

Hasáb:

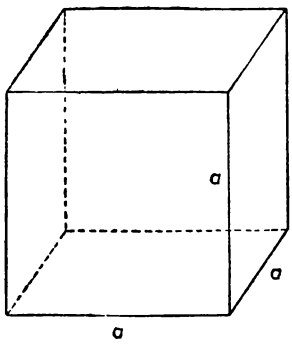
$$F = 2A_t + P$$

$$V = A_t \cdot m$$

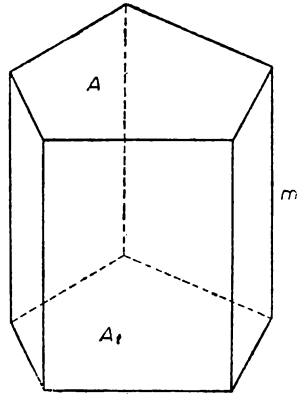
Kocka:

$$F = 6a^2$$

$$V = a^3$$



44. ábra

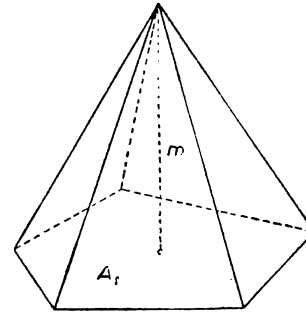


45. ábra

Gúla:

$$F = A_t + P$$

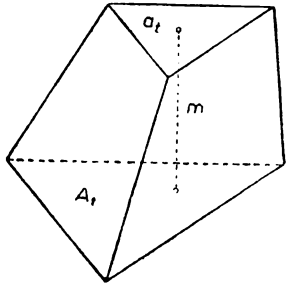
$$V = \frac{A_t \cdot m}{3}$$



46. ábra

Csonka gúla:

$$V = \frac{m}{3}(A_t + a_t + \sqrt{A_t \cdot a_t})$$

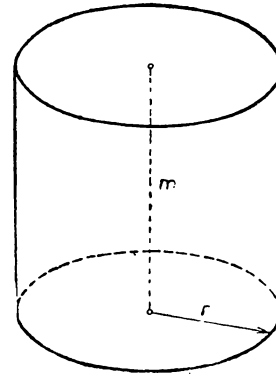


47. ábra

Henger:

$$F = 2r^2\pi + 2r\pi m$$

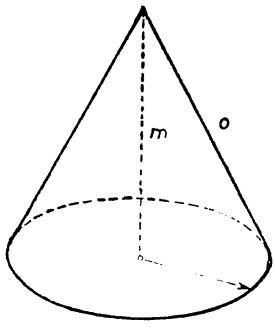
$$V = r^2\pi \cdot m$$



48. ábra

Kúp: $F = r^2\pi + r\pi o$

$$V = \frac{r^2\pi m}{3}$$

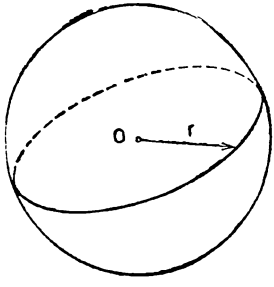


49. ábra

Gömb:

$$F = 4R^2\pi$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi$$

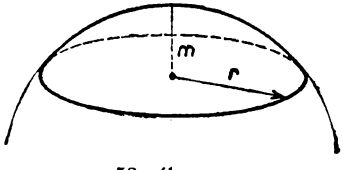


51. ábra

Gömbszelet:

$$V = \frac{m\pi}{6}(3r^2 + m^2) = \frac{m^2\pi}{3}(3R - m)$$

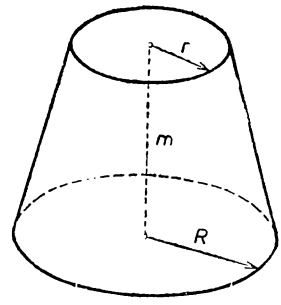
Gömbsüveg: $F = 2R\pi m$



53. ábra

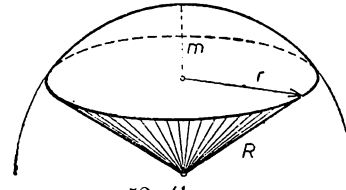
Csonka kúp: $F = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi o$

$$V = \frac{m\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$



50. ábra

Gömbcikk: (ejtőernyő) $V = \frac{2R^2\pi m}{3}$

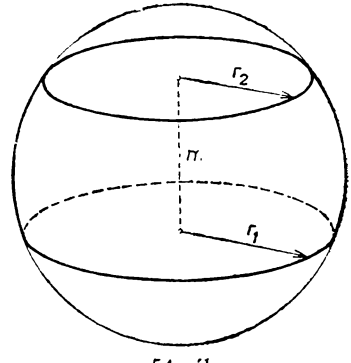


52. ábra

Gömbréteg:

$$V = \frac{m\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + m^2)$$

Gömböv: $F = 2R\pi m$



54. ábra

Feladatok

1. 80 mm szélességű négyzetes acélrúd súlya folyóméterenként 50,24 kg. Mekkora a fajsúlya?

2. Egy 4 m magas, 12 m felső szélességű és 45 fokos rézsűszögű vasúti töltést aluljáró érdekében a sínekre merőlegesen 15 m szélességben kell keresztülvágni. Hány m^3 földet távolítunk el?

3. Egy felül nyitott bádogdoboz alapméretei 8×10 dm^2; magassága 6 dm; 1 dm^2 bádog súlya 120 g. Milyen mélyen merül a vízbe, nyílásával felfelé?

4. Egy tekercs 5 mm átmérőjű acéldrót súlya 77 kg. Hány *m* hosszú, ha a fajsúlya 7,85 grs/cm^3?

5. Olajvezető cső súlya 7 q, fajsúlya 8 kg/dm^3, hossza 6 m, külső átmérője 30 cm. Mekkora a falvastagság?

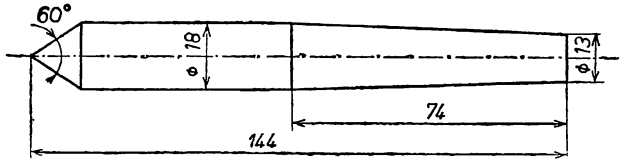
6. Hány m^2 bádog szükséges olyan négyzetesgúla alakú torony bevonásához, melynek alapéle 2 m és magassága 3 m?

7. Egy négyzetesgúla alakú tető alapéle $a = 3{,}20$ m; az oldallap és az alaplap hajlásszöge $\gamma = 31°20'$. Hány m^2 felületű a tető?

8. 40 cm sugarú negyedkörlemezből kúppalástot készítünk. Mekkora a keletkező kúp térfogata?

9. Lemezből 10 cm átmérőjű kúp alakú tölcsért készítünk. Mekkora sugarú körcikket kell a lemezből kivágnunk, ha azt akarjuk, hogy a tölcsér térfogata 0,5 l legyen? Mekkora a körcikk középponti szöge?

10. Számítsuk ki a rajzon feltüntetett 7,85 grs/cm^3 fajsúlyú nyeregszeg súlyát. (Minden méret mm-ben megadva.) (55. ábra.)



55. ábra

11. Egy csepp szappanoldatból, melynek alakját 0,5 cm átmérőjű tömör gömbnek vehetjük, egy 10 cm átmérőjű szappanbuborékot fújunk. Mekkora a szappanbuborék falának vastagsága? (Legalább 7-jegyű log-tábla használandó!)

12. 20 cm átmérőjű gömb közepén 12 cm átmérőjű lyukat fúrunk. Mekkora a visszamaradó gyűrű felszíne és köbtartalma?

6. §. GONIOMETRIA

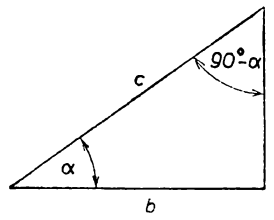
a) A szögfüggvények értelmezése és tulajdonságai

Valamely α hegyesszög szögfüggvényeit a derékszögű háromszögben az oldalak hányadosával értelmeztük. (L.: 5/*b*. α alatt.)

Ha $\alpha + \beta = 90°$, akkor fenti értelmezésekből adódik, hogy

$$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$$
$$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\operatorname{tg} (90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$
$$\operatorname{ctg} (90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

amit röviden úgy mondunk, hogy *pótszögek cofüggvényei egyenlők.*



56. ábra

Említettük már, hogy a hegyesszögek szögfüggvényértékeit hatványsorok segítségével (tetszőleges pontossággal) számíthatjuk, mégis vannak szögek, melyekre nézve a szögfüggvénytani értékek elemi úton is meghatározhatók. Gondolunk itt elsősorban 30, 60 és 45°-os szögek függvényértékeire, melyek egyenlőoldalú, ill. derékszögű egyenlőszárú háromszögekből számíthatók.

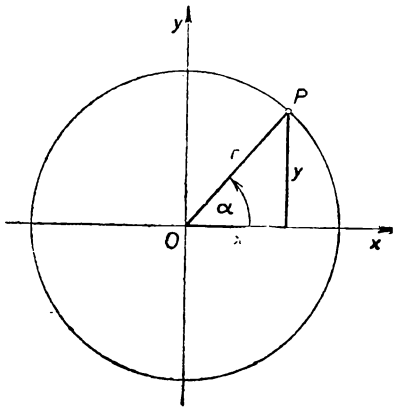
Különleges elbírálás alá esik a 0° és 90°-os szög, mert nincs olyan derékszögű háromszög, melynek valamelyik hegyesszöge 0° vagy 90° lenne. Ezen szögek szögfüggvénytani értékei az eddig ismertetett definíciók alapján „határértékek"-nek tekintendők. Ezek közül tg 90°-nak és ctg 0°-nak nincs értelme.

A 0°, 30°, 45°, 60°, 90°-os szögek szögfüggvénytani értékeit alábbi táblázatban foglaljuk össze:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5774$	1	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3} = 1{,}7321$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5774$	0

Egyrészt az általános háromszög megoldása, másrészt számos műszaki és elméleti vonatkozású kérdés szükségessé teszi, hogy a szögfüggvényeket 90 foknál nagyobb, valamint 0°-nál kisebb (azaz negatív) szögekre is értelmezzük. Pozitív, ill. negatív a szög, ha a szög „mozgó" szára a „nyugvó" szárból kiindulva az óramutató járásával ellenkező, ill. megegyező forgással jutott végső helyzetébe.

Egy tetszőleges (pozitív vagy negatív) szög szögfüggvényeit a következő módon értelmezzük: felveszünk egy derékszögű koordinátarendszert, melynek origója az α szög csúcsával és X-tengelye a szög nyugvó szárával esik egybe. Felveszünk továbbá egy r sugarú kört, melynek középpontja ugyancsak a koordinátarendszer középpontjába esik. Ekkor az α szög mozgó szára a kört egy P pontban metszi: ennek a P pontnak koordinátái legyenek x és y (abszcissza és ordináta). A tetszőleges α szög szögfüggvény-



57. ábra

értékeit a következő módon definiáljuk:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordináta}}{\text{sugár}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abszcissza}}{\text{sugár}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordináta}}{\text{abszcissza}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{abszcissza}}{\text{ordináta}}$$

Ha $r = 1$ („egységkör"), akkor $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ... stb. értékei az ábrából közvetlenül leolvashatók mert az α szöghöz tartozó körív végpontjának ordinátája, ill. abszcisszája számértékileg megegyezik a szög színuszával, ill. koszínuszával; tangense pedig az ordináta és abszcissza hányadosa stb.

A szögfüggvények ezen értelmezése — mint az rögtön belátható — magában foglalja a hegyesszögekre korábban ismertetett definíciókat. Ugyanakkor megállapítható, hogy valamely α szög 6 különböző szögfüggvényértéke nem független egymástól, mert közöttük 5 egyenlet áll fenn. Ha sec α és cosec α értékeit figyelmen kívül hagyjuk, a fennmaradó négy függvényérték között három egymástól független összefüggést találunk:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

tehát **összefoglalva:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

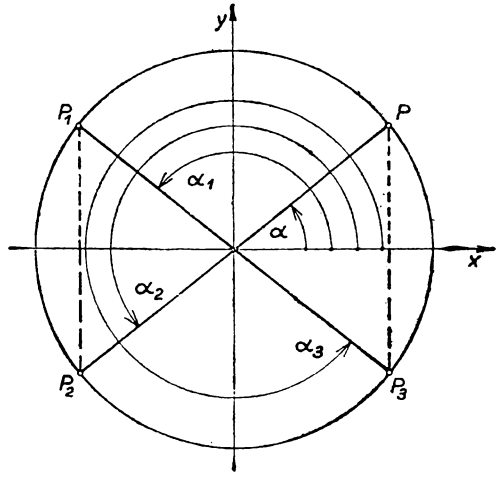
Ezen összefüggések segítségével bármely szögfüggvény kifejezhető bármely szögfüggvénnyel. Így pl. könnyen igazolható, hogy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \qquad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

* * *

A 2., 3. és 4. negyedbe eső szögek függvényértékeit a következőképpen határozhatjuk meg. (L. az 58. ábrát):



58. ábra

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\sin\alpha_1 = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$$

$$\sin\alpha_2 = \sin(180^\circ + \alpha) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha_3 = \sin(360^\circ - \alpha) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha$$

Példák

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hasonló módon járhatunk el a többi szögfüggvénynél is. Az eredményeket az alábbi táblázatba foglalhatjuk össze:

Negyed $\varphi =$	I. α	II. $180° - \alpha$	III. $180° + \alpha$	IV. $360° - \alpha$
$\sin \varphi$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

A szögfüggvények fent adott definíciói 360°-nál nagyobb, továbbá negatív szögekre is alkalmazhatók. Így

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k \cdot 360°) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k \cdot 360°) &= \cos \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180°) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{tg}\ (\alpha + k \cdot 180°) &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

és

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}\ (-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Példák

$$\sin 750° = \sin(30° + 2 \cdot 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-120°) = -\sin 120° = -\sin(180° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Feladatok

1. Számítsuk ki három tizedesig az $a = 5$, $b = 12$ cm befogójú derékszögű háromszög kisebbik hegyesszögének valamennyi szögfüggvényét!
2. Milliméterpapíron rajzoljunk 1 dm sugarú negyedkört és ennek segítségével az ábrából határozzuk meg 20°, 30°, 40°, 50°, 60° és 70° szögfüggvényértékeit! (sin, cos, tg).
3. Állapítsuk meg táblázat segítségével a következő szögek sinusát, cosinusát és tangensét:

a) 165°; *b)* 250,3°; *c)* 330°40′; *d)* −46°; *e)* −200°; *f)* 1000°; *g)* −1952°.

4. Állapítsuk meg táblázat segítségével a következő ívmértékben adott szögek függvényeit:

a) $\frac{13\pi}{8}$ *b)* $\frac{25\pi}{3}$ *c)* -2 *d)* 19

5. Határozzuk meg mindazokat a 360°-nál kisebb szögeket, amelyekre nézve

a) $\sin\alpha = 0{,}643$ *b)* $\sin\alpha = -0{,}643$ *c)* $\cos\alpha = 0{,}342$
d) $\cos\alpha = -0{,}342$ *e)* $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$ *f)* $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$

6. Számítással határozzuk meg a többi szögfüggvényértéket, ha

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; *b)* $\cos\beta = -\frac{3}{5}$; *c)* $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}5$; *d)* $\operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}$

7. Igazoljuk, hogy

$$\cos\Theta = \frac{1}{\left[1 + 3\left(\frac{d}{s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{ha} \quad \operatorname{tg}\Theta = \sqrt{3}\cdot\frac{d}{s}$$

8. Csavar hatásfoka

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varrho)}, \quad \text{ahol} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi D}$$

Mekkora η, ha a menetmagasság $h = 1{,}2$ mm, az átmérő $D = 8{,}3$ mm, a súrlódási együttható $\mu = \operatorname{tg}\varrho = 0{,}1$?

b) Addíciós tételek

Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontosak a szögfüggvények ún. addíciós tételei. Ezek két szög összegének szögfüggvényeit fejezik ki az egyes szögek szögfüggvényeivel a következő módon:

(I.)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad (3)$$

Fontosságukra való tekintettel igazoljuk fenti összefüggéseket, ha α és β hegyesszögek. (Így $\alpha+\beta$ hegyes, vagy tompaszög.)[1]

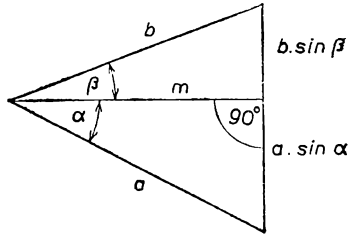
1. Igazoljuk, hogy

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Az ábrán látható nagy háromszög területe (l. az 59. ábrát)

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$$

a két kisebb derékszögű háromszög területének összegével egyenlő.



59. ábra

[1] Kimutatható, hogy az addíciós tételek tetszőleges (tehát derékszögnél nagyobb) α és β szögekre is érvényesek.

Tehát

$$\frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} m \cdot a \sin\alpha + \frac{1}{2} m \cdot b \sin\beta$$

De mivel

$$m = b \cos\beta \quad \text{vagy} \quad m = \alpha \cos\alpha,$$

ezért

$$\frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha \cos\beta + \frac{1}{2} ab \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

ahonnan $\frac{1}{2} \cdot ab$-vel való osztás után megkapjuk a szóban forgó 1. számú összefüggést.

2. Igazoljuk, hogy

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Az előbbi ábra nagy háromszögére alkalmazzuk a cos-tételt

$$a^2 \sin^2 a + b^2 \sin^2\beta + 2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta)$$

rendezve

$$2\,ab \cos(\alpha + \beta) = a^2 - a^2 \sin^2\alpha + b^2 - b^2 \sin^2\beta - 2ab \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ha még a^2-et, ill. b^2-et kiemeljük és figyelembe vesszük, hogy

$$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha, \text{ valamint } 1 - \sin^2\beta = \cos^2\alpha,$$

akkor

$$2ab \cos(\alpha + \beta) = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta - 2ab \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ámde $m = a \cos\alpha = b \cos\beta$; tehát $a \cos\alpha - b \cos\beta = 0$. Utóbbi egyenletet négyzetre emelve

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta - 2ab \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0$$

Innen

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta = 2ab \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Ennek az eredménynek a felhasználásával

$$2ab \cos(\alpha + \beta) = 2ab \cos\alpha \cos\beta - 2ab \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

ahonnan $2ab$-vel való osztás után megkapjuk a 2. sz. összefüggést.

3. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Ámde

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Ha az utolsó tört számlálóját és nevezőjét (tagonként) osztjuk $\cos\alpha \cdot \cos\beta$-val, megkapjuk a 3. alatti összefüggést, figyelembe véve, hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$$

* * *

Ha az (I) alatt felsorolt összefüggésekben β helyébe $(-\beta)$-t írunk és figyelembe vesszük, hogy $\sin(-\beta) = -\sin\beta$; $\cos(-\beta) = \cos\beta$; és $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, az alábbi összefüggéseket nyerjük:

(II.)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Ha az (I.) alatti összefüggésekben β helyett α-t írunk, nyerjük a kétszeres szögek függvényeit:

(III.)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Ha a (III.) alatti összefüggésekben α helyébe $\frac{\alpha}{2}$-t, tehát 2α helyébe α-t írunk, a következőket kapjuk:

(III/*a*.)

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Ha a

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

egyenletrendszert $\sin\alpha$, ill. $\cos\alpha$-ra megoldjuk, a következő összefüggéseket kapjuk:

(IV.) $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Vagy félakkora szögekkel:

(IV/a.) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Az (I.) és (II.) alatti két-két sor összeadása, illetőleg kivonása útján és $\alpha + \beta = x$ $\alpha - \beta = y$ jelölések bevezetésével (midőn is

$$\alpha = \frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{x-y}{2}\Big),$$

a következő összefüggésekhez jutunk:

(V.)
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Feladatok[1]

1. Igazoljuk, hogy

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \quad \text{és} \quad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

2. Számítsuk ki 15° szögfüggvényértékeit

a) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és a félszögekre vonatkozó képletek felhasználásával

b) a 45°-os és 30°-os szögek szögfüggvényeiből (az addíciós tételek alapján).

[1] E feladatok közül számosak nagy szerepet játszanak későbbi fejezetekben. (Pl.: integrálszámítás, Fourier-sorok stb.)

3. Számítsuk ki 75°, 105°, 135°, 22°30′, 67°30′, 7°30′ sinusát, cosinusát és tangensét!

4. Ismeretes $\sin\alpha = 0{,}7$; $\cos\beta = -\frac{5}{7}$; $\operatorname{tg}\gamma = 2$; $\operatorname{ctg}\delta = \frac{7}{12}$

Számítsuk ki 2α, 2β, 2γ, 2δ szögek szögfüggvényeit!

5. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0{,}4$ segítségével számítsuk ki $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ értékét!

6. Igazoljuk, hogy $\sin x = \frac{2\cdot z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, ahol $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

(L. alkalmazását az integrálszámításnál!)

7. Fejezzük ki $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$-et $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ segítségével!

8. Az addíciós tételek segítségével igazoljuk, hogy

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x; \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$

9. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}; \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg} 2x$$

10. Igazoljuk, hogy

$$\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx\cdot\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos kx = \frac{\sin(k+1)x - \sin(k-1)x}{2\sin x}; \quad \sin kx = \frac{\cos(k+1)x - \cos(k-1)x}{2\sin x}$$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \cos\frac{nx}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \sin\frac{nx}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

11. Mekkora x és y, ha

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = c$$
$$x \sin \alpha - y \sin \beta = 1$$

12. Mennyi $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6}$?

13. Igazoljuk, hogy $\operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$, ha $\mu = \operatorname{tg} \varrho$

14. Igazoljuk, hogy

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \equiv 0$$

és

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \equiv 0$$

15. Igazoljuk, hogy

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

16. C és φ mely értékei mellett állnak fenn a következő azonosságok:

$$3 \sin x + 8 \cos x \equiv C \sin(x + \varphi)$$
$$5 \sin x - 7 \cos x \equiv C \cos(x + \varphi)$$

17. Igazoljuk, hogy

$$a \sin x + b \cos x = C \sin(x + \varphi)$$

ahol

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

18. Igazoljuk, hogy

$$\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\sin(45° + \alpha) + \sin(45° - \alpha) = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}\ ; \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

19. Igazoljuk, hogy bármely háromszög szögeire nézve

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

20. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}\ ; \quad \frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}\ ; \quad \frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

c) Goniometrikus egyenletek

Olyan egyenleteket, amelyekben az ismeretlenek goniometrikus kifejezései előfordulnak, goniometrikus egyenleteknek nevezzük. (Ezek transzcendens, tehát nem algebrai egyenletek.) Legegyszerűbbek és szögfüggvénytani tábla segítségével megoldhatók a $\sin ax = b$, $\cos ax = b$ ... stb. típusúak. A többit igyekszünk erre az alakra hozni. Ez nem mindig lehetséges!

Így pl. a $\cos x - x = 0$; $\operatorname{tg} x + x - \frac{\pi}{4} = 0$; $x \sin x - 1 = 0$

egyenletek elemi úton nem oldhatók meg. Ennek látható jele az, hogy az ismeretlen (x) *nemcsak* goniometrikus kifejezésekben, hanem azonkívül is szerepel. Ha azonban az ismeretlen csak goniometrikus kifejezésekben szerepel és sikerül elérni, hogy csak egyféle ilyen kifejezés álljon az egyenletben, akkor a $\sin ax = b$ ... stb. típusokra való visszavezetés sikerül.

Példák

1. Oldjuk meg a

$$\boxed{\sin 2x = \cos x} \quad \text{egyenletet!}$$

Mivel

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

azért

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

vagyis

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

Az egyenlet bal oldalán $\cos x$-et kiemelve

$$\cos x \,(2 \sin x - 1) = 0.$$

Innen két egyenlethez jutunk

$$\text{I.} \quad \cos x = 0$$

$$\text{II.} \quad 2 \sin x - 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Az (I.) egyenletnek 0 és 2π közé eső gyökei

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

A (II.) egyenletnek ugyancsak két megoldása van 0 és 2π között

$$x_3 = \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{5\pi}{6}$$

Így az egyenletnek összesen négy gyöke van 0 és 2π között:

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}$$

Mivel a szögfüggvények 2π szerint periodikusak, a szóban forgó egyenletnek 0 és 2π határokon kívül még végtelen sok megoldása van. Ezeket a már meghatározott értékekből 2π egész számú többszöröseinek hozzáadásával (ill. levonásával) nyerjük.

A gyökök tehát így írhatók:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi \end{array}\right\} \text{ahol } k \text{ tetszőleges pozitív egész szám.}$$

2. Oldjuk meg a

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

egyenletet.

A szóban forgó egyenlet a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (négyzetes) összefüggés felhasználásával.

$$1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

azaz

$$2\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

alakban írható. Innen

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

tehát

(I.) $$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{és}$$

(II.) $$\sin x = -\frac{1}{2}$$

A (I.) egyenletnek a 0 és 2π közé eső gyökei

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

A (II.) egyenlet gyökei

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

Az egyenlet összes gyöke:

$$\frac{\pi}{6} \pm 2k\,\pi, \qquad \frac{5\pi}{6} \pm 2k\,\pi, \qquad \frac{7\pi}{6} \pm 2k\,\pi, \qquad \frac{11\pi}{6} \pm 2k\,\pi$$

Megjegyzés. Fenti egyenlet a $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ felhasználásával azonnal megoldható.

Feladatok

1. $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 1$
2. $4 \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$
3. $\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$
4. $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$
5. $\cos x - \sin^2 x + 0{,}4 = 0$
6. $12 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$
7. $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$
8. $9 \sin^2 \dfrac{x}{2} + 2 \cos x = 4$
9. $\sin x + \cos x = 1$
10. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$
11. $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$
12. $3 \sin 2x = 2 \cos x$
13. $5 \sin 2x = -7 \sin x$
14. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$
15. $\sin x = \cos x$
16. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$

7. §. ANALITIKUS SÍKGEOMETRIA

Az analitikus geometriában *geometriai feladatokat algebrai módszerekkel* oldunk meg. Ez csak úgy lehet, ha a geometriai fogalmaknak (pont, egyenes . . . stb.) számtani, ill. algebrai fogalmakat feleltetünk meg (számok, egyenletek, . . . stb.). Így például *a sík pontjainak számpárok és fordítva: minden számpárnak egy pont felel meg a síkon,* mégpedig oly módon, hogy különböző pontoknak különböző számpárok és különböző számpároknak különböző pontok. A sík pontjai és a valós számpárok ilyen kölcsönös és egyértelmű megfelelését koordinátarendszer segítségével tudjuk megvalósítani. (Leggyakrabban *derékszögű koordinátarendszert* használunk.) A pont koordinátái a pontnak a tengelytől való előjeles távolságát mutatják, éspedig az x-koordináta (abszcissza) az Y-, az y-koordináta (ordináta) az X-tengelytől való távolságot méri. Így a koordináták meghatározzák a pont helyzetét a síkon. Éppen a helymeghatározás problémája vezetett a koordinátarendszer fogalmához és lett kiindulópontja a matematika eme fontos és rendkívül termékeny ágának.

a) Két pont távolsága és a felezőpont koordinátái

Pythagoras tételének felhasználásával két pont távolságát (d) a pontok koordinátáival [$(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$] a következő módon fejezhetjük ki:

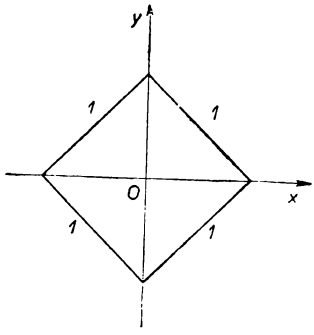
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A két pont közötti távolság felezőpontjának koordinátái:

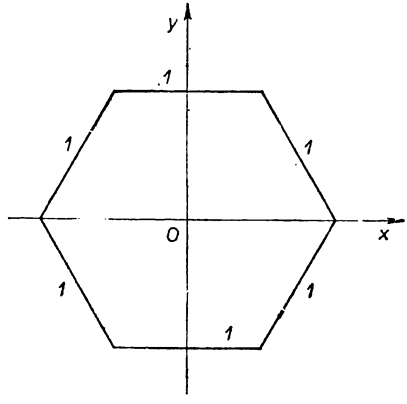
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Feladatok

1. Határozzuk meg az ábrán feltüntetett egységnyi oldalú szabályos négyszög és hatszög csúcspontjainak koordinátáit. (l. a 60. és 61. ábrát!)



60. ábra



61. ábra

2. Határozzuk meg a $P_1(3; 4)$, $P_2(-5; 2)$, $P_3(-2, -1)$, $P_4(3, -5)$, $P_5(5; 0)$, $P_6(0, -2)$ pontok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat *a)* az X-tengelyre, *b)* az Y-tengelyre, *c)* az origóra, *d)* az origón áthaladó és a pozitív X-tengellyel 45°-os szöget bezáró egyenesre nézve tükrözzük.

3. Igazoljuk, hogy a $P(x, y)$ pont tükörképének koordinátái

a) $(x; -y)$, ha az X-tengelyre tükrözzük,
b) $(-x; y)$, ha az Y-tengelyre tükrözzük,
c) $(-x; -y)$, ha az origóra tükrözzük,
d) (y, x), ha az XY-tengelyek első-, harmadik negyedbeli szögfelezőjére tükrözzük.

4. Mekkorák a háromszög oldalai, ha csúcsainak koordinátái:
(2; 3), (5; 7), (10; −3)?

5. A (4; 5) koordinátájú pontnak egy $x = -2$ abszcisszájú ponttól való távolsága $d = 10$ egység. Mekkora az utóbbi pont ordinátája (y)? (Hány megoldás?)

6. Határozzuk meg az Y-tengely azon pontjait, melyek a (−5; −9) ponttól 15 egységnyi távolságra vannak.

7. Határozzuk meg az X-tengely azon pontját, mely a (2; 1) és (6; 5) pontoktól egyenlő távolságra van.

8. Határozzuk meg az (1; 2); (2; 6); (6; 4) koordinátájú csúcsokkal bíró háromszög azon oldalfelezőjének hosszát, amely az (1; 2) csúcsból indul ki.

9. Valamely téglalap három egymásután következő csúcsának koordinátái: (1; 4), (3; 2), (6; 5). Határozzuk meg a negyedik csúcs és az átlók metszéspontjának koordinátáit.

b) Az egyenes analitikus geometria

A síkban fekvő bármely egyenesnek az analitikus geometriában egy

$$Ax + By = C$$

kétismeretlenes elsőfokú egyenlet felel meg. (Ez az egyenes általános egyenlete.) Minden kétismeretlenes egyenletnek végtelen sok számpár tesz eleget. Ezen (x, y) számpároknak megfelelő pontok (futópont) és csakis ezek pontjai a szóban forgó egyenesnek. Az egyenes helyzetét az A, B, C konstansok viszonya határozza meg.

Mivel az egyenest geometriailag *két pontja* meghatározza, az egyenes egyenlete e két pont koordinátáival $[(x_1, y_1); (x_2, y_2)]$ a következő módon adható meg:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ha a két adott pontot a tengelyeken vesszük fel $[(a, 0); (0, b)]$, akkor az egyenes *tengelymetszetes egyenletét* kapjuk:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ahol a, b (előjellel együtt) a tengelyekről lemetszett darabokat jelentik. (Az origón áthaladó egyenesek tengelymetszetei: $a = 0$, $b = 0$, ezért ilyen egyenesek egyenlete tengelymetszetes alakban nem írható fel.)

Mivel az egyenest nemcsak két pont, hanem *egy pont és egy irány*, például a pozitív X-tengellyel bezárt szög (irányszög) is meghatározza, ezért az egyenes egyenlete az adott P_1 pont (x_1, y_1) koordinátáival és az irányszög (α) tangensével $(\operatorname{tg}\alpha = m)$ is megadható a következő módon:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ha az adott P_1 pontot az Y-tengelyen vesszük fel $(0, b)$, az egyenes egyenletét a következő (ún. *iránytangenses*) alakban kapjuk:

$$y = mx + b$$

ahol b jelenti az egyenes által az Y-tengelyről lemetszett távolságot.

Speciális helyzetű egyenesek:

1. Az origón áthaladó egyenesek egyenlete, $b = 0$ folytán:

$$y = mx$$

2. A koordináta tengelyek szögfelezőinek egyenlete:

$$y = x \quad \text{és} \quad y = -x$$

3. Az X-tengellyel párhuzamos, attól b távolságban fekvő egyenes egyenlete:

$$y = b$$

4. Az Y-tengellyel párhuzamos, attól a távolságban fekvő egyenes egyenlete:

$$x = a$$

5. Az X-tengely egyenlete:

$$y = 0$$

6. Az Y-tengely egyenlete:

$$x = 0$$

Két (nem egybeeső) *egyenes kölcsönös helyzete a síkban* kétféle lehet:

1. A két egyenesnek nincs közös pontja (párhuzamosak).
2. A két egyenesnek van egy közös pontja (metszik egymást).

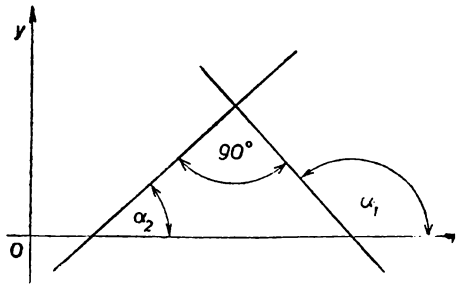
A metszéspont koordinátáit az egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldása szolgáltatja.

Ha *két egyenes párhuzamos*, akkor irányszögeik[1] tehát iránytangenseik is egyenlők: $m_1 = m_2$ (Ez a párhuzamosság feltétele.)

Ha *két egyenes merőleges*, akkor irányszögeik különbsége $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$, tehát $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, azaz $\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 = 0$, vagy még $\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2$-vel osztva: $1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = 0$, tehát $1 + m_1 m_2 = 0$, ahonnan a merőlegesség analitikus feltétele a közismert alakban:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

[1] Az egyenes irányszöge az a 180°-nál kisebb szög, melyet kapunk, ha a pozitív X-tengelyt az óramutató járásával ellenkező forgással beleforgatjuk az egyenesbe.



62. ábra

Feladatok

1. Állapítsuk meg, hogy az (1; −1); (7; 3); (2; 1) pontok közül melyek feküsznek rajta a $2x - 3y = 5$ egyenesen.

2. Szerkesszük meg az

$$y = 4, \quad x = -3, \quad y = x, \quad y = -x, \quad y = 2x,$$

$$y = -\frac{2}{3}x, \quad y = x - 2, \quad y = \frac{3}{4}x + 1, \quad 2x - 3y = 5$$

egyenleteknek megfelelő egyeneseket.

3. Írjuk fel azon egyenes egyenletét, melynek irányszöge $\alpha = 135°$ és az Y-tengelyt a kezdőponttól $b = -3$ helyen metszi.

4. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, melynek irányszöge 120° és az X-tengelyt az $a = 4$ pontban metszi?

5. Szerkesszük meg az $y = -3x + 5$ egyenest, számítsuk ki irányszögét (α) és határozzuk meg az egyenes és az X-tengely közti területet $x = 0$ és $x = 1$ határok között.

6. Mekkorák a $8x - 5y = 40$ egyenes tengelymetszetei?

7. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, melynek irányszöge $\alpha = 30°$ és átmegy a (3; 5) ponton?

8. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, mely a (4; 5) ponton megy át és az X-tengelyt a −3 pontban metszi?

9. Írjuk fel a (−2; −3) és (4; 5) pontokon átmenő egyenes általános, iránytangenses és tengelymetszetes egyenletét.

10. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, mely a (3; 4) ponton megy keresztül és a tengelyekkel 27 egységnyi területű háromszöget zár be? (Hány megoldás?)

11. Határozzuk meg az $x + 2y = 12$ és $5x - 3y = -5$ egyenesek metszéspontjának koordinátáit.

12. Valamely háromszög oldalainak egyenlete $4x - 5y = -13$, $7x + 2y = 31$, $3x + 7y = 1$. Mekkora a háromszög kerülete?

13. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely a (4, 5) ponton megy keresztül és a $3x + 2y = 12$ egyenessel párhuzamos?

14. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely az origón megy keresztül és merőleges az $5x - 7y = 35$ egyenesre?

15. Mi az egyenlete a (−1; 2), (3; 4) pontok által meghatározott szakasz felezőpontjában emelt merőlegesnek?

16. Milyen távolságra van a (2 ; 5) pont a $3x + 4y = 6$ egyenestől?

17. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1, y_1)$ pnnt távolsága az $Ax + By + C = 0$ egyenestől

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}!$$

c) Kúpszeletek (másodrendű görbék)

Ha egy körkúpfelületet síkkal metszünk, akkor a sík és kúp kölcsönös helyzetétől függően a következő metszési vonalakat kaphatjuk: kör, ellipszis, hiperbola, parabola (egymást metsző vagy párhuzamos) egyenespár. A kapott görbéket *kúpszeleteknek* nevezzük.

Az analitikus geometriában a kúpszeleteknek kétismeretlenes másodfokú egyenletek felelnek meg. Ezek az egyenletek (legáltalánosabb esetben) következő alakúak:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ezért a kúpszeleteket másodrendű görbéknek is nevezzük. Az egyenletben fellépő konstansok viszonya lényegesen függ a görbének a koordinátarendszerben való helyzetétől.

(Az egyenespárokat „elfajult" másodrendű görbéknek nevezzük. Egyenletük mindig felbontható két elsőfokú egyenlet szorzatára.) Egy egyenesnek és egy másodrendű görbének legfeljebb kettő, két másodrendű görbének legfeljebb négy közös pontja lehet. A metszéspontok koordinátáit az egyenletrendszer gyökei adják.

c) 1. *Kör*

A kör minden pontja egy adott ponttól (a kör középpontjától) állandó (r) távolságra van (r a kör sugara). Ha a kör középpontjának koordinátái: u, v, akkor a kör egyenlete

$$\boxed{(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2}$$

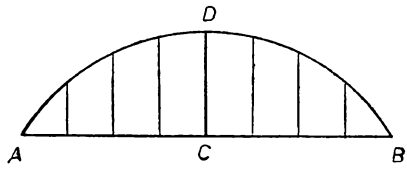
amely $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$ alakra is hozható. Ha a kör centrális elhelyezkedésű, azaz középpontja az origóban van, akkor egyenlete

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Feladatok

1. Írjuk fel a kör egyenletét, ha
   a) középpontja (4; 3) és kerületi pontja (7; 5),
   b) keresztülmegy a (−1; 1), (4; 2), (4; 4) pontokon,
   c) keresztülmegy az (5; 6) és (7; 4) pontokon és középpontja a $2x + y = 8$ egyenesen fekszik,
   d) keresztül megy a (4; 2) ponton és érinti a két koordinátatengelyt,
   e) sugara 5 egység, átmegy a (9; 9) ponton és érinti az X-tengelyt,
   f) sugara 5 egység és az Y-tengelyt az origóban érinti.
2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 6x - 18y + 80 = 0$ kör középpontjának koordinátáit és sugarát.
3. Határozzuk meg az $(x - 6)^2 + y^2 = 25$ kör és $x = 2$ egyenes metszéspontjainak koordinátáit, valamint az ezen pontok és a kör középpontja által meghatározott háromszög területét.
4. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 18$ kör $x - y = 2$ egyenesen fekvő húrjának hosszát és felezőpontjának koordinátáit.
5. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ körök metszéspontjain átmenő egyenes (a két kör „hatványvonala") egyenletét.

6. Körív alakú hídív AB fesztávolsága 80 m, CD ívmagassága 20 m. Milyen hosszúak a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak? (63. ábra.)



63. ábra

7. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 = r^2$ kör (x_1, y_1) koordinátájú pontjában húzott érintő egyenlete $xx_1 + yy_1 = r^2$. (Az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra!)

8. Határozzuk meg az $(5; -3)$ pontból az $x^2 + y^2 = 9$ körhöz húzható érintők érintési pontjait és az érintők hosszát.

9. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 = r^2$ kör szimmetrikus az X- és Y-tengelyekre, az origóra és az $y = x$ egyenesre.

c) 2. *Ellipszis*

Az ellipszis bármely pontjának két adott ponttól (fókuszoktól) való távolságainak összege állandó. Ha az ellipszis úgy helyezkedik el, hogy fókuszai az X-tengelyen vannak, és középpontja (a fókuszok által meghatározott szakasz felezőpontja) az origóba esik (ún. centrális és főtengelyekre transzformált elhelyezés), akkor ún. *„kanonikus"* egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ha az ellipszist a pozitív X-tengely irányában eltoljuk úgy, hogy érintse az Y-tengelyt, akkor az ellipszis ún. *csúcsegyenlete:*

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

a és b az ellipszis féltengelyei, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ a lineáris excentricitás (a fókuszok távolsága) a középponttól,

$e = \frac{c}{a} < 1$ a numerikus excentricitás és $p = \frac{b^2}{a}$ a félparaméter (a fókuszon átmenő és a tengelyre merőleges húr fele).

Feladatok

1. Mi az egyenlete annak a centrális és főtengelyre transzformált helyzetű ellipszisnek, amely

a) keresztül megy a $(8; 3)$ és $(6; 4)$ pontokon,
b) a $(4; 6)$ ponton megy keresztül és lineáris excentricitása $c = 4$,
c) félparamétere $p = 7{,}2$ és numerikus excentricitása $e = 0{,}6$.

2. Mekkorák a $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipszis féltengelyei, lineáris és numerikus excentricitása, félparamétere? Írjuk fel az ellipszis csúcsegyenletét!

3. Milyen hosszú az $5x^2 + 9y^2 = 161$ ellipszisnek az $y = -x + 7$ egyenesen fekvő húrja?

4. A $36x^2 + 100y^2 = 3600$ ellipszis egyik pontjának abszcisszája 6. Mekkorák e ponthoz tartozó vezérsugarak?

5. Határozzuk meg az $x^2 + 2y^2 = 34$ ellipszis 4 abszcisszájú pontján átmenő átmérő hosszát és egyenletét.

6. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis szimmetrikus az X- és Y-tengelyekre és az origóra.

c) 3. Hiperbola

A hiperbola bármely pontjának két adott ponttól (fókuszoktól) való távolságainak különbsége állandó. A centrális és főtengelyekre transzformált helyzetű hiperbola egyenlete („*kanonikus*" egyenlet);

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Csúcsponti elhelyezés esetén

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

a a valós, b a képzetes tengely fele; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a lineáris, $e = \frac{c}{a} > 1$ a numerikus excentricitás, $p = \frac{b^2}{a}$ a félparaméter.

Az $y = \frac{b}{a}x$ és $y = -\frac{b}{a}x$ egyenesek a hiperbola aszimptotái, melyek a hiperbolát a „végtelenben" érintik. Ha $a = b$, az aszimptoták egymásra merőlegesek, a hiperbola egyenlőszárú. Ha a hiperbola aszimptotái a koordinátatengelyek, akkor egyenlete $xy = k$. (Centrális, de nem főtengelyekre transzformált elhelyezés.)

Feladatok

1. Határozzuk meg annak a centrális és főtengelyekre transzformált helyzetű hiperbolának egyenletét, amelynek
   a) valós féltengelye $a = 3$ és átmegy az $(5; 8)$ ponton,
   b) lineáris excentricitása $c = 10$ és átmegy a $(4 \cdot \sqrt{5}; 3)$ ponton,
   c) egyik aszimptotája $y = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x$ és átmegy a $(4; -8)$ ponton.
2. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, melynek aszimptotái a koordinátatengelyek és a $(-4; 2)$ ponton megy át?
3. Határozzuk meg a $9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbola féltengelyeit, lineáris és numerikus excentricitását, félparaméterét és a 6 abszcisszájú pontjához tartozó vezérsugarak hosszát.
4. Határozzuk meg a $128x^2 - 16y^2 = 2048$ hiperbola aszimptotáinak egyenletét.
5. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör és a $9x^2 - 4y^2 = 108$ hiperbola metszéspontja által meghatározott négyszög átlóinak egyenletét.

6. Határozzuk meg az $x^2 + 4y^2 = 25$ ellipszis és az $xy = 6$ hiperbola metszéspontjait összekötő egyenesek egyenletét.

7. Határozzuk meg az $x^2 = a^2$; $y^2 = b^2$ és $x^2 - y^2 = 0$ elfajult másodrendű görbék alakját.

8. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola szimmetrikus a koordinátatengelyekre és az origóra nézve.

9. Igazoljuk, hogy az $xy = k$ egyenlőszárú hiperbola szimmetrikus az origóra és az $y = x$ egyenesre nézve.

c) 4. *Parabola*

A parabola minden pontja egy adott ponttól (fókusz) és egy adott egyenestől (vezéregyenes; direktrix) egyenlő távolságra van. Ha a vezéregyenest az X-tengelyre merőlegesen, a fókuszt az X-tengelyen, az Y-tengelyt pedig a fókusz és vezéregyenes közti távolság felezőpontján át vesszük fel, akkor a *parabola (csúcs) egyenlete:*

$$y^2 = 2px$$

ahol p a félparaméter.

Feladatok

1. Mi a csúcsegyenlete annak a parabolának, melynek fókusza a parabola csúcsától 3 egységnyire van?

2. Mekkora az $y^2 - 5x = 0$ parabola félparamétere és fókuszának a csúcsától való távolsága?

3. Mekkora az $y^2 = 4x$ parabola azon pontjához húzott vezérsugara, melynek abszcisszája 4 egység?

4. Milyen hosszú az $y^2 = 9x$ parabolának az a húrja, amely a fókuszon megy keresztül és rányszöge 60°?

5. Milyen hosszú az $y^2 = 8x$ parabolának azon húrja, mely a parabola $y_1=4, y=12$ ordinátájú pontjait köti össze?

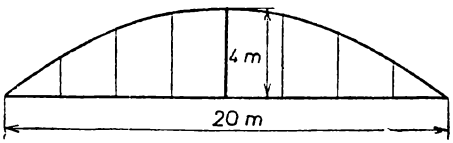
6. Igazoljuk, hogy az $y^2 = 2px$ parabola szimmetrikus az X-tengelyre.

7. Igazoljuk, hogy az $y^2 = 2px$ parabolának az $y = x$ egyenesen való tükrözése révén keletkező parabola egyenlete $y = \frac{1}{2} x^2$

8. Igazoljuk, hogy az $y = ax^2 + c$ parabola szimmetrikus az Y-tengelyre és csúcsa az origótól c távolságra van (az Y-tengelyen).

9. Hol van az $y = \frac{1}{4} x^2 + 1$ parabola fókusza és vezérvonala?

10. Egy hídnál szereplő parabolatartó fesztávolsága 20 m. Ívmagassága 4 m. Milyen hosszúak a 2,5 méterenként elhelyezett függőleges rudak? (64. ábra.)



64. ábra

8. §. VEGYES GYAKORLÓ FELADATOK

Feladatok a 2. §-hoz (Aritmetika)

Hozzuk legegyszerűbb alakra a következő (1—24.) kifejezéseket. Állapítsuk meg, hogy az adott kifejezések a bennük előforduló betűk mely értékei mellett vannak értelmezve.[1] (Nevező nem lehet nulla, gyök alatti mennyiség nem lehet negatív.)

1. $\dfrac{1}{\dfrac{4ab}{b^2-a^2}-\dfrac{a-b}{a+b}}$ $\left[\dfrac{b-a}{b+a};\quad a\neq\pm b\right]$

2. $\dfrac{\left(4a-\dfrac{b^2}{a}\right)\left(a-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)}{1+\dfrac{a}{a+b}}$ $\left[\dfrac{(2a-b)\,b(a-b)}{a};\quad \begin{array}{l} a\neq 0,\ a+b\neq 0,\\ 2a+b\neq 0\end{array}\right]$

3. $\dfrac{\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{3b}{b^2-4a^2}-\dfrac{2}{2a+b}}{\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1}$ $\left[-\dfrac{1}{4a};\ a\neq 0,\ b\neq\pm 2a\right]$

4. $\left(\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}-\dfrac{1}{4a}\right)$ $\left[\dfrac{a-1}{a+1};\ a\neq 0,\ \pm 1\right]$

5. $\left(a-\dfrac{a+b}{1+ab}\right):\left(1-\dfrac{-1+ab}{a(b-a)}\right)$ $\left[\dfrac{ab(a-b)}{1+ab};\ \begin{array}{l} a\neq 0,\pm 1\\ b\neq a\\ ab\neq -1\end{array}\right]$

6. $1-\dfrac{8a}{a^2-4}\left(1+\dfrac{a^2+4}{4a}\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}\right)$ $\left[2\left(1+\dfrac{1}{a}\right);\ a\neq 0;\ \pm 2\right]$

7. $\dfrac{a+2a+3a+\ldots+n\cdot a}{n^2-2n-3}$ $\left[\dfrac{a}{2}\ \dfrac{n}{n-3};\ n\neq -1;\ 3\right]$

8. $\dfrac{a^3-(b-a)^3}{a^3+b^3}-3\dfrac{b^2-ab}{a^2-b^2}$ $[2;\ a\neq\pm b]$

9. $\dfrac{2}{a}-\left(\dfrac{a^2}{a^2+ab}-\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{b^2}{ab+b^2}\right)\cdot\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ $\left[\dfrac{a+b}{ab};\ \begin{array}{l} ab\neq 0\\ a+b\neq 0\end{array}\right]$

[1] Az átalakítások helyességének ellenőrzésére célszerű a betűket számokkal helyettesíteni. Például az 1. feladatban legyen $a=1$, $b=2$; mindkét kifejezés értéke $\frac{1}{3}$.

10. $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+2ab+b^2}}{\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a}{b-a}}$ $\left[\dfrac{ab}{a+b};\ ab\neq 0,\ a\pm b\neq 0\right]$

11. $\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{a}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}$ $\left[\dfrac{a+b}{a-b};\ \dfrac{a\pm b\neq 0}{2a+b\neq 0}\right]$

12. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}-\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$ $\left[-\dfrac{1}{x};\ |x|<1;\ x\neq 0\right]$

13. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ $[4x\sqrt{x^2-1};\ |x|>1]$

14. $\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right):\dfrac{4x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$ $\left[1;\ \left|\dfrac{x}{y}\right|>1,\ y\neq 0\right]$

15. $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right):\left(\sqrt{1-x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x}};\ |x|<1,\ x\neq 0\right]$

16. $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}+\dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}-\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y}\right)$ $\left[\sqrt{x}-\sqrt{y};\ \begin{matrix}x>0,\ y>0\\ x\neq y\end{matrix}\right]$

17. $\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{a}}$ $[\pm a\sqrt{b};\ a\neq 0,\ a\neq 2b]$

18. $\dfrac{\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}}{a-b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $[1;\ a>0, b>0,\ a\neq b]$

19. $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+\dfrac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+3\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$ $\left[3;\ \begin{matrix}a>0,\ b>0\\ a\neq b\end{matrix}\right]$

20. $\dfrac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}-\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)$ $\left[b^2-a^2;\ \begin{matrix}a+b\geqq 0\\ a-b\geqq 0\\ b\neq 0\end{matrix}\right]$

21. $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{2(\sqrt{ab}-b)}{a-b}$ $\left[\dfrac{a}{2};\ \begin{matrix}ab>0\\ a^2+b^2>0\\ a\neq b\end{matrix}\right]$

22. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$, ahol $x=\dfrac{2a}{1+a^2}$. Mutassuk meg, hogy a bármely értéke jelleti x $|\leqq 1$. Így az adott kifejezés minden a-ra értelmezve van, és értéke a, ha $a|\leqq 1$, viszont $\dfrac{1}{a}$, ha $|a|\geqq 1$.

23. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\left[\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\ \begin{matrix}a\geqq 0,\\ b\geqq 0,\\ a\neq b\end{matrix}\right]$

24. $\dfrac{x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+x^2(1-x)^{-\frac{5}{3}}}{(1-x)^{+\frac{1}{3}}\cdot(1-2x+x^2)^{-1}}$ $[x;\ x\neq 1]$

25. Mennyi a következő kifejezés értéke?

$$\left[4^{-\frac{1}{2}}+\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}\right]\cdot\left[\frac{1}{4^{0,25}}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right] \qquad \left[\frac{12-3\sqrt{2}}{8}\right]$$

26. Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

27. Igazoljuk, hogy $x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$ esetén $x^3+3x^2+2=0$.

28. Igazoljuk, hogy $x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$ esetén $x^3+3px+2q=0$

29. Hozzuk legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:[1]

a) $^a\log(x+\sqrt{x^2-1})+{}^a\log(x-\sqrt{x^2-1})$ [0]

b) $\dfrac{2x\cdot\log 10x}{x+\log x^x}$ [2]

30. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

$$10^{2\log 7};\ 100^{\frac{1}{3}\log 8};\ 100^{1-\log\frac{5}{2}};\ {}^{0,5}\log 8 \qquad [49;\ 4;\ 16;\ -3]$$

31. Logaritmáljuk az alábbi kifejezéseket:

$$x=\frac{a^{-2}\cdot\sqrt[3]{2\sin^2\alpha}}{5n^3\cdot a^2}\cdot\left[\log x=\frac{1}{3}\log 2-\log 5+\frac{2}{3}\log\sin\alpha-3\log n-4\log a\right]$$

$$x=\log\left(5\sqrt[3]{4}\right)\qquad\left[\log x=\frac{1}{3}\log 4+\log\log 5\right]$$

$$x=\log\sqrt{(a+b)^{\log(a+b)}}\qquad[\log x=2\log\log(a+b)-\log 2]$$

32. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

$$\sqrt[3]{\log 2};\ (\log 2)^{\log 2};\ 0{,}5^{\log 0{,}5}\qquad[0{,}6702;\ 0{,}6967;\ 1{,}232]$$

[1] A log szócska 10-es alapú logaritmust jelent, ha az alap nincs kiírva.

Feladatok a 3. §-hoz (Egyenletek)

Oldjuk meg a következő egyenleteket, illetve egyenletrendszereket, és vizsgáljuk meg, hogy az egyenletben szereplő betűk mely értékei mellett van megoldás?

1. $\dfrac{x-2}{2x^2+2x} - \dfrac{4}{1-x^2} - \dfrac{x+1}{2x^2-2x} = 0$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

2. $\left(a+b-\dfrac{2b^2}{b-a}\right) : x = \left[\dfrac{(a+b)^2}{2ab} - 1\right] : \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$ $[x = 2;\ ab \neq 0,\ a \neq b]$

3. $\dfrac{a^2-2x}{2x+1} - \dfrac{a^2+2x}{1-2x} = \dfrac{2(a^4-1)}{4x^2-1}$ $\left[x = \dfrac{a^2-1}{2}\right]$

4. $\dfrac{a+b}{a+2b} + \dfrac{x}{b} = 1 + \dfrac{b(b-x)}{a^2+2ab}$ $\left[x = \dfrac{b^2}{a+b};\ \begin{array}{l} ab \neq 0,\ a+b \neq 0 \\ a+2b \neq 0 \end{array}\right]$

5. $\dfrac{a^2b-ab^2}{x-bc} + \dfrac{b^2c-bc^2}{x-ab} + \dfrac{abc}{x-bc} = \dfrac{abc}{x-ab}$ $[x = b(a+c)]$

6. $\begin{array}{l} x - a(1-y) = 1 \\ a(x-a) + y = \dfrac{1}{a} \end{array}$ $\left[x = a;\ y = \dfrac{1}{a}\right]$

7. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy a

$$\frac{2x+3}{3x+a}$$

tört értéke bármely x esetén ugyanakkora legyen. $\left(a = \dfrac{9}{2}\right)$. Útmutatás: legyen k a tört állandó értéke; akkor a $(2-3k)x + (3-ka) = 0$ egyenletnek x minden értékére fenn kell állnia. (Azonosság.)

8. Igazoljuk, hogy $\dfrac{a-b}{\alpha} = \dfrac{b-c}{\beta} = \dfrac{c-a}{\gamma}$ esetén $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Útmutatás: egyenletrendszerünk a következőképpen írható:

$$a - b = k \cdot \alpha$$
$$b - c = k \cdot \beta$$
$$c - a = k \cdot \gamma$$

ahol k állandó (arányossági tényező).

9. Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az

$$\frac{x}{2x-6m^2} = \frac{2}{3(x-m)}$$

egyenletnek csak egy megoldása legyen. $\left[m_1 = \dfrac{4}{9};\ m_2 = -\dfrac{4}{15}\right]$

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

10. $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x+b} + \dfrac{1}{x+a} = 0$ $\left[x_1 = 0;\ x_{2,3} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right]$

11. $\left(a-\frac{1-x}{b}\right)\left(a+1+\frac{x}{b}\right)=a+\frac{1+x}{b}$ $[x_1=-(1+ab);\ x_2=1+b-ab]$

12. $4\left(1-\frac{a}{x}\right)^2+\left(1-\frac{a}{x}\right)-\frac{1}{2}=0$ $\left[x_1=\frac{4}{3}a;\quad x_2=\frac{2}{3}a\right]$

13. $\frac{x^2-b^2}{3ay}-\frac{5x+b}{24b^2}=-\frac{1}{y}$ $[x_1=b,\ y_1=4b;\ x_2=-b,\ y_2=-6b]$

$5x-y=b$

14. b mely értéke mellett van az

$$y=x+b$$
$$x^2+y^2=r^2$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása, és mi a megoldás? $[b=\pm r\sqrt{2}]$

15. $\sqrt{\frac{1+3x}{4+5x}}+\sqrt{\frac{4+5x}{1+3x}}=\frac{13}{6}$ $\left[x_1=1;\ x_2=-\frac{32}{33}\right]$

16. $\sqrt[3]{\frac{4x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{4x}}=\frac{5}{2}$ $\left[x_1=2;\ x_2=-\frac{1}{31}\right]$

17. $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{x}{a}}}=\frac{2a}{x}$ $[x=a]$

18. $\sqrt{3-x}+2\frac{3-2x}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$ $\left[x_1=\frac{9}{5};\ x_2=\frac{3}{2}\right]$

19. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$ $\left[x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}\right]$

20. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$ $\left[x=\frac{25}{16}\right]$

21. $5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19$
$3\sqrt{x^2-3y-1}-2\sqrt{x+6y}=1$
$\left[\begin{array}{ll} x_1=4; & y_1=2 \\ x_2=-\frac{9}{2}, & y_2=\frac{41}{12}\end{array}\right]$

22. ${}^x\log 8=2+{}^x\log 4$ $[x=\sqrt{2}]$

23. ${}^8\log\frac{x}{1-x}=-\frac{1}{2}$ $\left[x=\frac{1}{3}\right]$

24. ${}^2\log x+{}^4\log x=1$ $[x=\sqrt[3]{4}]$

25. $\log 5+\frac{1}{2}\log(x+5)=\log 3+\log(x+1)$ $[x=4]$

26. $\log \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{2}\log(2x-1) = 1$ $\left[x = \frac{401}{2}\right]$

27. $\log \sqrt{5x-4} + \log \sqrt{x+1} = 2 + \log 0{,}18$ $[x = 8]$

28. $\frac{\log(9-x^2)}{\log(3-x)} = 2$ $[x = 0]$

29. $\log(\log x) = 0$ $[x = 10]$

30. $\log(-\log x) = 0$ $\left[x = \frac{1}{10}\right]$

31. ${}^{2}\log(x-1)^2 - {}^{\frac{1}{2}}\log(x-1) = 9$ $[x = 9]$

32. $4 \cdot {}^{x}\log 10 = {}^{a}\log 100$ $[x = a^2]$

33. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ $[x_1 = 1;\ x_2 = 4]$

34. $3^{\log x} = x^{x^2}$ $[x_1 = 1,\ x_2 = \sqrt{\log 3}]$

35. $x^{-\log x} = \sqrt{x}$ $\left[x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

36. $\log(x^{2\log x}) = 8$ $\left[x_1 = 100;\ x_2 = \frac{1}{100}\right]$

37. $x^{\log x} = 10^4$ $\left[x_1 = 100,\ x_2 = \frac{1}{100}\right]$

38. $y^{x^2+7x+12} = 1$, $x + y = 6$ $\left[\begin{matrix} x_1 = -3,\ y_1 = 9 \\ x_2 = -4,\ y_2 = 10 \end{matrix}\right]$

39. $\log x + \log y = 2$, $x - y = 15$ $[x = 20;\ y = 5]$

40. ${}^{4}\log x - {}^{2}\log y = 0$, $x^2 - 5y^2 + 4 = 0$ $\left[\begin{matrix} x_1 = 1,\ y_1 = 1 \\ x_2 = 4,\ y_2 = 2 \end{matrix}\right]$

41. ${}^{a}\log x + {}^{a}\log y + {}^{a}\log 4 = 2 + {}^{a}\log 9$, $x + y - 5a = 0$ $\left[x = \frac{9}{2}a,\ y = \frac{1}{2}a\right]$

Feladatok az 5. §-hoz (Geometria)

1. Valamely pontból egy körhöz húzott érintők hossza 6 cm. Az érintési pontokat összekötő húr 5 cm-re van a kör középpontjától. Mekkora a kör sugara? $[3\sqrt{5}]$

2. Egy négyszög átlói merőlegesek egymásra; hosszuk 4 cm, illetve 7 cm. Mekkora a négyszög területe? $[14\ \text{cm}^2]$

3. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a, illetve b cm. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja az átfogón fekszik, és amely kör a befogókat érinti? $\left[\frac{ab}{a+b}\right]$

4. Egy derékszögű háromszög befogói a, illetve b cm hosszúak. Az átfogóval párhuzamos egyenes a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Milyen távolságra van ez az egyenes a derékszögű csúcstól? $\left[\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right]$
5. r-sugarú körlemezből négy egyenlő és maximális területű körlemezt vágunk ki. (A körök érintkeznek.) Az anyag hány %-a hulladék? [28%]
6. r-sugarú kör középpontjától $2r$ távolságban fekvő pontból a körhöz érintőket húzunk. Mekkora az érintők között fekvő körív hossza? $\left[r\frac{\pi}{3}\right]$
7. Egyenlőszárú háromszöget az alappal párhuzamos egyenesssel két egyenlő területű részre osztunk fel. Milyen arányban osztja az egyenes a háromszög magasságát? $[(\sqrt{2}-1):1]$
8. 5 cm magasságú, 30 cm^2 területű egyenlőszárú trapéz szárai 60°-os szögben hajlanak az alaphoz. Mekkora az alap? $\left[6+\frac{5}{\sqrt{3}}\right]$
9. Egyenlőszárú trapéz alapja a, szára b cm hosszú; az alapon fekvő szöge α. Mekkora a trapéz területe, ha $a=b$ és $\alpha=120°$? $[3a^2\sqrt{3}]$
10. r-sugarú körlemezből vágjunk ki α középponti szögű, maximális területű körcikket. Mekkora a körcikk sugara és területe? $\left[2r\cos\frac{\alpha}{2};\ 2r^2\cdot\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$
11. Két egymást metsző r-sugarú kör közül az egyiknek középpontja rajta van a másik kör kerületén (és fordítva). Mekkora a két kör által határolt lencse alakú idom területe? $\left[r^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
12. Egyenlőszárú derékszögű háromszög derékszögű csúcsán át húzott egyenessel a háromszöget két olyan részre osztjuk, melyek területaránya 1 : 2. Mekkorák a csúcsnál keletkező szögek? $\left[\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{1}{2}\right]$
13. Egy háromszög kerülete: k cm; szögei: α, β, γ. Mekkorák az oldalai? [$a=\lambda\cdot\sin\alpha$, $b=\lambda\sin\beta$, $c=\lambda\sin\gamma$, ahol
$$\lambda=\frac{k}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}]$$
14. Egy háromszögben ismeretes két oldal l és r ($l>r$), továbbá a nagyobbik oldallal szemben fekvő α szög. Mekkora a harmadik oldal? $\left[r\cos\alpha+l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\alpha}\right]$
15. Egy háromszög egyik oldala 8 cm hosszú, ezen oldalon fekvő egyik szöge 30°, és ezen oldalhoz tartozó magassága 6 cm. Mekkora a másik két oldal? $[12\text{ cm};\ 2\sqrt{52-14\sqrt{3}}\text{ cm}]$
16. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza a, illetve b cm; másik két oldala c, illetve d cm hosszú. Mekkorák az átlók?
$$\left[\sqrt{ab+\frac{ac^2-bd^2}{a-b}};\quad\sqrt{ab+\frac{ad^2-bc^2}{a-b}}\right]$$
17. Derékszögű háromszög egyik befogója b, a rajta fekvő α szög szögfelezője f cm hosszú. Mekkora a másik befogó? $\left[\frac{2b^2\sqrt{f^2-b^2}}{2b^2-f^2}\right]$ Mutassuk meg, hogy a feladatnak csak akkor van megoldása, ha $b<f<b\sqrt{2}$!

18. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy vele egy csúcsból kiinduló éllel és lapátlóval? $\left[\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

19. Mekkora a szabályos a élű tetraéder magassága? $\left[a\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ Mekkora szöget zár be a magasság egy oldaléllel és egy oldalmagassággal? $\left[\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}};\ \cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

20. Egy gúla alaplapja a oldalú négyzet. Oldallapjai szabályos háromszögek. Mekkora a gúla magassága; mekkora szöget zár be a magasság egy oldaléllel és egy oldalmagassággal $\left[\frac{a}{\sqrt{2}},\ \alpha = 45°,\ \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

21. Egy téglalap alapú egyenes gúla oldaléleinek hossza l; az oldallapoknak a gúla csúcsából induló magasságai m, illetve n hosszúságúak. Mekkora a gúla magassága? $[\sqrt{m^2 + n^2 - l^2}]$

22. Az $ABCDE$ négyoldalú gúla $ABCD$ alapja téglalap és az $\overline{AE}$ él merőleges az alapra. Továbbá $\overline{AB} = 4$; $ADE\sphericalangle = 45°$, $BCE\sphericalangle = 60°$. Mekkora a $\overline{BC}$ él? $[2\sqrt{2}]$

23. Az $ABCD$ tetraéder alaplapja az ABC háromszög. Az $\overline{AD}$ él merőleges az alapra. Továbbá $\overline{BC} = 3$; $ADB\sphericalangle = 60°$, $BDC\sphericalangle = 30°$, $ADC\sphericalangle = 45°$. Mekkora az $\overline{AD}$ él? $\left[\frac{1}{2}\sqrt{18 + 6\sqrt{6}}\right]$

24. Egy gúla alaplapja egy a oldalú négyzet, oldallapjai szabályos háromszögek. Határozzuk meg annak a gömbnek a sugarát, mely a gúla lapjait belülről érinti. $\left[a\frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{4}\right]$

25. Négyzet alapú egyenes gúla minden éle 46 cm. Mekkora az alaplap és oldallap hajlásszöge? [54°44′]

26. Négyzet alapú egyenes gúla alapélei 10 cm hosszúak, magassága 8 cm. Mekkora az alaplap középpontjának az oldallapoktól való távolsága? $\left[\frac{40}{\sqrt{89}}\right]$

27. Egy kúpot az alaplappal párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre osztunk. Milyen arányú részekre bontják a síkok a kúp magasságát? $[(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) : (\sqrt[3]{2} - 1) : 1]$

28. Egy gömb nagyobbításakor térfogata 12%-kal növekszik. Hány %-kal nő a felszíne? [7,85%]

Feladatok a 6. §-hoz (Goniometria)

1. Legyen α hegyes szög és $\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$. Számítandó $\sin\frac{\alpha}{2}$. $\left[\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right]$

2. Legyen α tompaszög és $\operatorname{tg}\alpha = k < 0$. Mekkora $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$? $\left[\frac{-1 - \sqrt{1 + k^2}}{k} > 0\right]$

   Ezen az alapon számítsuk ki tg 67,5°-ot. $[1 + \sqrt{2}]$

3. Legyen $\cos\alpha = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$. Mekkora $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$? $[u]$

4. Mekkora $\sin\alpha$, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$. $\left[\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right]$

5. Igazoliuk, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$

6. Igazoljuk, hogy $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{\cos 2\alpha}=1$

7. Mekkora $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$, ha $\sin 2x=a$? $\left[\frac{2}{a}\right]$

Oldjuk meg a következő goniometrikus egyenleteket, illetve egyenletrendszereket.

8. $\sin 2x+3\sin x=2\operatorname{tg}x$ $\left[x_1=0,\ x_2=\pi;\ x_3=\frac{\pi}{3},\ x_4=5\frac{\pi}{3}\right]$

9. $\sin x-\cos y=\frac{1}{2}$, $\cos 2x+\cos 2y=-\frac{3}{2}$ $\left[x_{1,2}=\frac{\pi}{2};\ y_1=\frac{\pi}{3},\ y_2=5\frac{\pi}{3}\right]$

10. $\sqrt{2}\cdot\sin x=\sin y$, $2\cdot\cos x=\sqrt{6}\cdot\cos y$ $\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=5\frac{\pi}{6},\ x_3=7\frac{\pi}{6},\ x_4=11\frac{\pi}{6}\\ y_1=\frac{\pi}{4},\ y_2=3\frac{\pi}{4},\ y_3=5\frac{\pi}{4},\ y_4=7\frac{\pi}{4}\end{array}\right]$

11. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2$, $2\cos x\cdot\cos y=1$ $\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=5\frac{\pi}{4}\\ y_1=\frac{\pi}{4},\ y_2=5\frac{\pi}{4}\end{array}\right]$

12. $2\sin x=\sqrt{3}\cdot\sin y$, $2\cos x=1-\cos y$ $\left[\begin{array}{l}x_1=0;\ x_2=\frac{\pi}{3}\\ y_1=\pi;\ y_2=\frac{\pi}{2}\end{array}\right]$

Feladatok a 7. §-hoz (Analitikus geometria)

1. Egy m iránytangensű egyenest az $y=x$ egyenesen tükrözünk. Mekkora lesz a tükörkép iránytangense? $\left[\frac{1}{m}\right]$

2. Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó; egy másik csúcsa a $P(3,1)$ pont. Határozzuk meg az első síknegyedben fekvő harmadik csúcs koordinátáit. $\left[\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

3. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy a

$$\frac{5}{a}x-2y+6=0;\ x-y-2a=0;\ 3x-ay-1=0$$

egyenesek egy ponton menjenek át. $\left[-\frac{3}{16}\right]$

4. Egy háromszög két csúcspontja: $A(3,2)$; $B(5,-3)$. Az x tengely a háromszög egyik belső szögfelezője. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit. $[(-1,0)]$

5. Egy háromszög két oldalának egyenlete $y = 3x$ és $y = \frac{2}{5}x$. A harmadik oldal felezőpontja a (6,5) pont. Határozzuk meg a csúcspontok koordinátáit. [(0,0); (2,6); (10,4)]
6. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szára az x tengelyre, alapjának egyik végpontja az origóba esik. A háromszög súlypontjának koordinátái (4,2). Határozzuk meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit. [(0,0); (6,0); (6,6) és (0,0); (10,0); (2,6)]
7. Határozzuk meg az $y = 2x - 3$ egyenes azon pontjait, amelyek a $P(1, -1)$ ponttól egységnyi távolságra vannak. $\left[\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, -1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$
8. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 2x = 0$ kör azon pontjának koordinátáit, amely legközelebb van az $\frac{x}{2} + y = 1$ egyeneshez. $\left[\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$
9. Tekintsük az $x^2 + y^2 = 2x + 3$ körnek az origón áthaladó húrjait.
   a) Határozzuk meg e húrok felezőpontjainak koordinátáit.

$$\left[\xi = \frac{1}{1+m^2},\quad \eta = \frac{m}{1+m^2},\ \text{ahol } m \text{ a húr iránytangense.}\right]$$

   b) Mi a felezőpontok mértani helye? [Kör, melynek egyenlete: $\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}$]
10. Határozzuk meg annak az ellipszisnek egyenletét, melynek gyújtópontjai egybeesnek az $x^2 - y^2 = 2$ hiperbola gyújtópontjaival és amely átmegy a (2,3) ponton.
$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1\right]$
11. Egy ellipszis főtengelyeinek hossza 10 és 6 cm. Az ellipszisbe olyan téglalapot írunk, melynek átlói 60°-os szöget alkotnak. Mekkora a téglalap területe?
$\left[\frac{15^2 \cdot \sqrt{3}}{31} = 30{,}7\ \text{cm}^2\right]$
12. Mutassuk meg, hogy a „technikai" parabola $y = ax^2 + bx + c$ egyenlete $(a \neq 0)$ írható a következő alakban:

$$y = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)\right]$$

   a) Határozzuk meg az x-tengellyel való metszési abszcisszákat.

$$\left[x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

   b) Mutassuk meg, hogy $a > 0$ esetén a parabolának mélypontja, ellenkező esetben tetőpontja van.
   c) Igazoljuk, hogy a mélypont, illetve tetőpont abszcisszája $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
   d) Legyen $P_1(x_1, y_1)$ a parabola egy pontja és $y = y_1 + m(x - x_1)$ e ponton áthaladó tetszőleges irányú egyenes. m mely értéke mellett van az egyenesnek a parabolával csak egy közös pontja [$m = 2ax_1 + b$]
13. Határozzuk meg b értékét úgy, hogy az $y = x + b$ egyenesnek az $y = x^2$ parabolával csak egy közös pontja legyen. (Érintő.) Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.
$\left[-\frac{1}{4};\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right]$
14. Az $y = x^2$ parabolát az $y = x$ egyenessel párhuzamos egyenesek metszik. Határozzuk meg a kimetszett húrok felezőpontjainak mértani helyét. $\left[x = \frac{1}{2},\ \text{egyenes}\right]$.

EREDMÉNYTÁR

1. §. SZÁMTAN

b A négy alapművelet tizedestörtekkel

1. 355,910; 2. 3,866; 3. 3421,25; 4. 0,00106; 5. 0,0148; 6. 105,77; 7. 0,14; 8. 7,606 q.

c. A mennyiségek közötti összefüggések

1. 5,7 cm; 2. 320 mm; 3. 2 g; 4. 5 m; 5. 0,296 kg; 6. 2,54 kg; 7. 40°; 60°; 80°;
8. 12; 36; 9. 85,5; 171; 427,5; 10. 210; 45; 15; 11. 70; 105; 140; 12. 32,50 Ft; 13. 1,48%; 14. 30 l; 15. 2000; 16. 30 kg; 17. 40; 6; 4; 18. 5%; 19. 68,6%; 8,7 l.

2. §. ARITMETIKA

a. A műveletek és számok áttekintése

1. -8; 2. 7; 3. 25; 4. $-12{,}6$; 5. 2; 6. $-2{,}5$; 7. 10201; 8. 0,5625; 9. $0{,}000011664 = 1{,}1664 \cdot 10^{-5}$; 10. 1,4142; 11. 1,7321; 12. 253,4; 13. $3{,}63 < \sqrt{13{,}2} < 3{,}64$; 14. 0,7211; 15. 0,184; 16. 0,0316; 17. $8i$; 18. $1{,}1i$; 19. $0{,}424i$; 20. $6i$; 21. -15; 22. $-3{,}6$; 23. -9; 24. $-8i$; 25. 1; i; -1; $-i$; 1; i: -1; $-i$; 1; i...; 26. 1; i; -1; $-i$; 27. 6; 28. 25.

c. Algebrai kifejezések átalakítása

c) 1. *Polinomok szorzatfelbontása*

α) A közös tényező kiemelése

1. $x(3x - 1)$; 2. $x(x^2 + 1)$; 3. $x^4(x - 1)$; 4. $x^3(3x^2 + 2)$; 5. $x(ax + b)$; 6. $3ax(3x + 2a - 1)$; 7. $x(a - b) + y(a - b) = (x + y)(a - b)$; 8. $x(x + 1)(x + y)$; 9. $(x + 2)(3x^2 + 4y + y^2)$.

β) Felbontás nevezetes szorzatok alapján

1. $(x - 1)(x + 1)$; 2. $(2a - 3b)(2a + 3b)$; 3. $(3x - 1)(3x + 1)$; 4. $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; 5. $[3(a + b) - 2c] \cdot [3(a + b) + 2c]$; 6. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; 7. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$; 8. $(n + 1)(n^2 - n + 1)$; 9. $x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$; 10. $x^2(x - 1)(x + 1)$; 11. $x^3(x - 1)(x + 1)$; 12. $(x - 1)(x^2 + 1)$.

γ) Másodfokú polinomok felbontása

1. $(x - 2)(x - 3)$; 2. $(x - 1) \cdot (x - 2)$; 3. $(x - 1)(2x + 1)$; 4. $(3x - 1)(4x + 3)$; 5. $(x - 1)^2$; 6. $x(x - 1)(x - 5)$; 7. $2(x^3 - 1) - 3x(x - 1) = 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 3x(x - 1) = (x - 1)(2x^2 - x + 2)$; 8. $(x + 1)^3$.

c) 2. *Többtagú kifejezések zártabb alakban való előállítása*

11. $\dfrac{(n + 1)(2 + 3n)}{2}$ 12. $\dfrac{x^{2k+1} + 1}{x + 1}$

13. $2^{n+1} - 1$ 14. $2 - \dfrac{1}{2^n}$ 15. $\dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$

z) 3. *Törtekkel kapcsolatos átalakítások*

α) 1. $2x^2 - x - 3 + \frac{5}{2x+1}$ 2. $x + 3 + \frac{7x-5}{x^2-3x+2}$

3. $x^2 + 2x - \frac{1}{x^2-2x+1}$ 5. $1 + \frac{2}{x-1}$

6. $1 - \frac{5}{x^2+5}$ 7. $1 + \frac{3x-1}{x^2-x+1}$

9. $\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{6x+9} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{}{2x+3}$

10. $2 - \frac{2x+3}{x^2+x+1}$

β) 1. $\frac{a-b}{a+b}$ 2. $\frac{x+y}{x-y}$ 3. $\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$

4. $\frac{a+3b}{2a}$ 5. $\frac{3a}{4b}$ 6. $\frac{a+1}{a-1}$

7. $\frac{1}{a-3}$ 8. $\frac{x-1}{x-2}$

γ) 1. $\frac{3x+1}{x^2-1}$ 2. $\frac{x-6}{x^2-3x}$ 3. $\frac{13}{12(x-5)}$

4. $\frac{x+a}{ax}$ 5. $\frac{4b}{a+2b}$ 6. $\frac{2a-b}{a^2-b^2}$

7. $\frac{a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)}$ 8. $-\frac{2}{a}$ 9. $\frac{1}{a}$

δ) 1. $\frac{4-x^2}{1-a^2}$ 2. $\frac{a^2b}{10} - \frac{ab^2}{2}$ 3. $\frac{c^2}{4} - \frac{c}{2} - 12$

4. $ax - \frac{1}{4} + \frac{3}{2ax} = \frac{1}{4ax}(4a^2x^2 - ax + 6)$

ε) 1. $\frac{1}{a}$ 2. $\frac{3a}{2}$ 3. $a - 1$

4. $\frac{ab}{a+b}$ 5. $\frac{b}{a+b}$ 6. $\frac{2}{x-y+2}$

ζ) 1. $-\frac{3ab^2}{2xy^2}$ 2. $\frac{3x^5}{16y^4} - \frac{5x^4}{8y^5} = \frac{3x^5y - 10x^4}{16y^5}$

3. $\frac{2mn}{9p^2(m-1)}$ 4. $\frac{5b^5}{3a^2}$

5. $8x^3y^3z - \frac{8}{3}x^2y^2z - \frac{16}{3}xyz$ 6. $\frac{1}{a^4} + \frac{4x^3}{3a} = \frac{3+4a^3x^5}{3a^4}$

7. $\frac{4x^3 + 6x^2 + 6x + 9}{8x^3 - 6x^2 - 20x + 15}$ 8. $\frac{(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2}$

9. $\frac{x}{3} + 2$ 10. $-\frac{2}{3x}$

η) 1. $\frac{3y - 5x}{5y - 3x}$ 2. $\frac{3a + 4b}{12} = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$

3. $\frac{a}{b}$ 4. $\frac{1}{a}$ 5. $\frac{x(x-1)(x-2)}{2 - x^2}$

6. $\frac{x - y}{x + y}$ 7. $\frac{x}{2x - 1}$

c) 4. Hatványokkal kapcsolatos átalakítások

α) 1. x^{-2} 2. $2x^{-3}$ 3. $-a \cdot x^{-a}$ 4. $k \cdot x^k$

5. $x^{\frac{1}{2}}$ 6. $x^{\frac{1}{3}}$ 7. $\frac{1}{2} x^{\frac{2}{3}}$ 8. $\frac{3}{5} x^{\frac{3}{4}}$

9. $x^{-\frac{1}{2}}$ 10. $2x^{-\frac{2}{3}}$ 11. $-3x^{-\frac{3}{4}}$ 12. $\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

13. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$ 14. $x^{\frac{7}{6}}$ 15. $x^{\frac{3}{2}}$

16. $2x^{\frac{5}{3}}$ 17. $-3x^{-\frac{7}{6}}$ 18. $x^{\frac{3}{2}}$ 19. $x^{-\frac{1}{3}}$

20. $x^{\frac{1}{6}}$ 21. $x^{\frac{1}{6}}$ 22. x^8

β) 1. $\frac{1}{x^2}$ 2. $\frac{1}{x^3}$ 3. $\frac{a^3}{a - 1}$ 4. $\frac{x^2(x-1)}{x + 1}$

5. $\frac{2}{3} x$ 6. $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 7. 2 8. $\sqrt{x}$

9. $-2\sqrt[3]{x^2}$ 10. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x - y}$ 11. $\frac{1}{2\sqrt{(\sqrt{a} - 1)^3}}$

12. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 13. $-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ 14. $\frac{1}{8}$ 15. 81

16. 3 17. $\frac{1}{81}$ 18. $\frac{1}{9}$

γ) 1. $(2x)^3$ 2. $[(a - b)\,c\,]^2$ 3. $[2\,(1 - x^2)\,]^n$ 4. $\left(\frac{5}{a}\right)^2$

5. $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ 6. $(a^2 - b^2)^2$ 7. $\sqrt{a^2 - b^2}$ 8. $\sqrt{a - b^2}$

9. 5 10. 3 11. $\sqrt{a-b}$ 12. $(x+1)^2$

13. $(x-1)^2$ 14. $(x-3)^2$ 15. $(2x+1)^2$ 16. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

17. $(\sqrt{2}\cdot x-1)^2$

δ) 1. $2\sqrt{3}$ 2. $3\sqrt{2}$ 3. $10\sqrt{3}$ 4. $5\sqrt{3}$

5. $\frac{7}{11}\sqrt{2}$ 6. $2ab^2c^2\sqrt{2ac}$ 7. $\frac{6a^3}{5xy^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3y}}$ 8. $a\sqrt{a-1}$

9. $(x+1)\sqrt{x}$ 10. $(a+b)\sqrt{a-b}$ 11. $x^3\sqrt{x^2-x}$

ε) 1. $\sqrt[3]{6}$ 2. $\sqrt{12}$ 3. $\sqrt{a^3}$ 4. $\sqrt{a}$

5. $\sqrt{x^2-x}$ 6. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

ζ) 1. $\sqrt{a}$ 2. $\sqrt[4]{a}$ 3. $\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ 4. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

5. $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$ 6. $\sqrt[3]{x}$ 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 9. $\sqrt[4]{2}$

10. $-2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{6}$ 11. $-3\sqrt{5}-6\sqrt{2}$

12. $2-\sqrt{3}$ 13. $\sqrt[3]{4}$ 14. $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

η) 1. $1-2x+x^2$ 2. $25x^4y^6-60x^5y^4+36x^6y^2$ 3. $4+9n^2+16n^4-12n+$
$+16n^2-24n^3=4-12n+25n^2-24n^3+16n^4$ 4. x^3+3x^2+3x+1.
5. $a^3x^3-3a^2bx^2y^2+3ab^2xy^4-b^3y^6$
6. $3-2\sqrt{2}$ 7. $a+b+2\sqrt{ab}$ 8. $159-36\sqrt{10}$

d) A logaritmussal kapcsolatos átalakítások

α) 1. 0,3175 2. 2,012 3. 0,4257 4. 24,42 5. 1,05.

γ) 1. log 1 2. log 10 3. log 100 4. log 0,1 5 log 0,01 6 log 2x 7. log 10x
8. $\log\frac{x}{3}$ 9. $\log\frac{100}{x}$ 10. $\log x^2$ 11. $\log\sqrt[3]{x-1}$ 12. $\log\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

δ) 1. x 2. $x+y$ 3. $x-\frac{1}{n}$ 4. x^2 5. x^2 6. $1+x$ 7. x^2; 8. $\sqrt{x}$
9. $\frac{x}{y}$ 10. $\frac{1}{x}$

8. §. ELEMIEN MEGOLDHATÓ EGYENLETEK

a) Egyismeretlenes egyenletek megoldása

α) Elsőfokú egyenletek

1. $x = -2$ 2. $x = 0$ 3 $x = 1$ 4. $x = \frac{14}{3}$ 5. $x = \frac{3}{4}$ 6. $x = 10$
7. $x = 2$ 8. $x = -1$ 9. $x = p + q$ 10. $x = p - q$ 11. $x = 5b^3$
12. $x = \frac{a - b}{2}$ 13. $x = 2a$ 14. $\alpha = \frac{l_2 - l_1}{l_1 \cdot t}$ 15. $k = \frac{t \cdot f}{t - f}$ 16. $t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$ 17. 6,25 kg 18. 51 óra 26 perc 19. 15 20. 205 cm; 295 cm.

β) Másodfokú egyenletek

1. $x_1 = -4;\ x_2 = -\frac{1}{2}$
2. $x_1 = x_2 = \frac{5}{3}$
3. $x_1 = 2 + 3i;\ x_2 = 2 - 3i$
4. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{8}{3}$
5. $x_1 = \frac{2}{5};\ x_2 = -\frac{1}{2}$
6. $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{1}{5}$
8. $x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{b}{a}$
9. $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$
10. $x_1 = a;\ x_2 = 2a$
11. $i = \sqrt{\frac{Q}{0{,}24rt}}$
12. $t = \sqrt{\frac{2(s - s_0)}{a}}$
13. $r = \frac{-\pi m \pm \sqrt{\pi^2 m^2 + 2\pi F}}{\pi};$
14. $t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g(s - s_0)}}{g}$
15. $H = r\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\, r;$
16. $t = \frac{14}{3} \approx 5$ C°
17. 20; 20.

γ) Magasabbfokú egyenletek

1. $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$; tehát I. $x = 0$; II. $x - 1 = 0$; III. $x + 1 = 0$. Ezért $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_2 = -1$.
2. $x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1$
3. $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{3}{2};\ x_3 = -\frac{3}{2}$
4. $x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = \frac{5}{4}$
5. $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3$
6. $x_1 = 0;\ x_2 = i;\ x_3 = -i$
7. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x_1 = 1;\ x_{2,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $x_1 = a;\ x_{23} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$

9. $x_1 = \frac{b}{a};\ x_{2,3} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b\sqrt{3}}{2a}$

10. $x_1 = -1;\ x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i;$

11. $x_1 = -a;\ x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$

12. $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = i;\ x_4 = -i$

13. $x^3 - 1 = 0$ és $x^3 + 1 = 0$ egyenletek gyökei.

14. $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{1}{2}$

15. $x_1 = 1;\ x_2 = -3;\ x_3 = -\frac{1}{3}$

16. $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = \frac{1}{3}$

17. $x_1 = -1;\ x_2 = i;\ x_3 = -i = \frac{1}{i}$

18. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2$

19. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 4$

20. $x_{1,2} = \pm 2;\ x_{3,4} = \pm 3$

21. $x_{1,2} = \pm 2;\ x_{3,4} = \pm 4$

22. $x_{1,2} = \pm 3;\ x_{2,4} = \pm 5$

23. $(x - 5^2) = y$ helyettesítéssel:

$x_1 = 3;\ x_2 = 7;\ x_{3,4} = 5 \pm i\sqrt{3}$

24. $x = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 5;\ x_4 = 4$

25. $x^2 + 3x + 2 = y$ helyettesítéssel

$y_1 = -4;\ y_2 = -3;$ tehát

$x^2 + 3x + 6 = 0$ és $x^2 + 3x + 5 = 0;$ ahonnan

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2};\quad x_{3,4} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

26. $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm a$

27. $x_{1,2} = \pm a;\ x_{3,4} = \pm 2a$

28. $x_{1,2} = \pm a;\ x_{3,4} = \pm b$

29. $x_{1,2} = \pm a;\ x_{3,4} = \pm(a + 2)$

30. $x_1 = 3;\ x_2 = \frac{1}{3};\ x_3 = 2;\ x_4 = \frac{1}{2}$

31. $x_1 = x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = \frac{1}{2}$

32. $x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{2};$

$$x_3 = -4;\ x_4 = -\frac{1}{4}$$

33. $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0;\ x_1 = 1;$

$$x_{2,3} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};\quad x_{4,5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

δ) Irracionális egyenletek

1. $x = 6;$ 2. $x = 4;$ 3. $x = 6$ $\left[-\frac{17}{3}\right.$ nem megoldás!$\left.\right]$

4. $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{7}{4}$; 5. $x = 6$ 6. $x = 10$; 7. $x = 4$

$\left[-\frac{9}{2}\right.$ nem megoldás!$\left.\right]$ 8. $x_1 = 6$; $x_2 = 5\frac{1}{13}$

9. $x = 1 + 2\frac{\sqrt{ab}}{a}$ 10. $x_{1,2} = \pm a\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(1 + x^2 - 3x^2) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - 2x^2) = 0.$

Mivel $1 + x^2 > 0$, ezért $1 - 2x^2 = 0$, ahonnan $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Transzcendens egyenletek

1. $x = 20{,}7$ 2. $x = -0{,}46$ 3. $x = 1{,}697$ 4. $x = 1{,}51$

5. Az egyenlet írható így: $8^{\frac{2x+3}{x}} = 8^3$; tehát

$\frac{2x+3}{x} = 3$ és $x = 3$; 6. $x = 5$; 7. $3^x = y$

helyettesítést alkalmazva, $y_1 = 3$; $y_2 = \frac{1}{3}$, tehát

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$. 8. $x = 1$

9. $3^x = y$; $x_1 = 1$; $x_2 = 0{,}63$; 10. $x = 5$; 11. $x = \frac{1}{49}$

12. $x = 1$ 13. $x_1 = 77$; $x_2 = -3$ 14. $x = 100$

15. $x = 10\,000$.

b) Egyenletrendszerek

α) Elsőfokú egyenletrendszerek

1. $x = 2$; $y = 1$ 2. $x = 12$; $y = 21$;

3. $x = 6$; $y = 5$ 4. $x = \frac{59}{13}$; $y = \frac{25}{13}$;

5. $x = \frac{132}{7}$; $y = \frac{205}{7}$ 6. $x = \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{4}$

7. $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$ 8. $x = \frac{a+b}{a}$; $y = \frac{a-b}{b}$

9. $x = ab$; $y = 1$ 10. $x = \frac{1}{a+b}$; $y = -\frac{1}{a+b}$

11. $x = 2b$; $y = \frac{(a-b)^3}{a^2+b^2}$ 12. $x = b + a$; $y = b - a$:

13. $E = i_1 i_2 \frac{r_2 - r_1}{i_1 - i_2}$; $R = \frac{i_2 r_2 - i_1 r_1}{i_1 - i_2}$ 14. $i_1 = i\frac{r_2}{r_1 + r_2}$; $i_2 = i\frac{r_1}{r_1 + r_2}$

15. $x_1 = x - d\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$; $x_2 = x + d\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$;

16. 32 km/óra; 8 km/óra;

17. 120 dkg; 180 dkg;

18. $x = 7$; $y = 9$; $z = 11$

19. $x = 5$; $y = 7$; $z = 9$;

20. $x = 6$; $y = 3$; $z = 1$

21. $x = \dfrac{6}{7}$; $y = -\dfrac{6}{7}$; $z = \dfrac{31}{7}$;

22. $x = 3$; $y = 4$; $z = 1$

23. $x = 9$; $y = 12$; $z = 15$;

24. $x = 20$; $y = 30$; $z = 40$

25. $x = 3$; $y = 4$; $z = 7$;

26. $x = \dfrac{a - b + c}{2}$; $y = \dfrac{a + b - c}{2}$; $z = \dfrac{-a + b + c}{2}$

27. $x = y = z = 1$

28. $i_1 = i\dfrac{r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$; $i_2 = i\dfrac{r_1 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$;

$i_3 = i\dfrac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$

β) Magasabbfokú egyenletrendszerek

1. (3; 7), (7; 3)

2. (13; 9), (−9; −13)

3. (5; 2)

4. (2; 3), (3; 2)

5. (1; 0), (4; 2)

6. (3; 2), (−1; 3)

7. (3; 2), (2; 3)

8. (7; 9), (−7; −9), (9; 7), (−9; −7)

9. (1; 2), (−1; −2), (2; 1), (−2; −1)

10. (2; 3), (−2; 3), (2; −3), (−2; −3)

11. (4; 1,) $\left(\dfrac{3}{7}; -4\right)$

12. (43; 7), (−43; −7), (7; 43), (−7; −43)

13. (2; 1), $\left(\dfrac{7}{2}(7 + 3\sqrt{5}); -\dfrac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})\right)$, $\left(\dfrac{7}{2}(7 - 3\sqrt{5}); -\dfrac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})\right)$

14. (9; 7), (−7; −9)

15. (1; 2), (2; 1), $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}; \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}; \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}\right)$

16. $r = 25$; $V = 250$

17. $r_{1,2} = \dfrac{V}{2i_2}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{i_1 - 4i_2}{i_1}}\right)$; $r_1 = 40$; $r_2 = 60$

18. $r = \dfrac{-i_1 r_1 + \sqrt{i_1^2 r_1^2 + 4Vi_1 r_1}}{2i_1} = 25$ $i = \dfrac{i_1 r_1 + \sqrt{i_1^2 r_1^2 + 4Vi_1 r_1}}{2r_1} = 2$

19. $k_{1,2} = \dfrac{2f - d \pm \sqrt{d^2 + 4f^2}}{2} = \begin{cases} 50 \\ -15 \end{cases}$

$t_{1,2} = \dfrac{2f + d \pm \sqrt{d^2 + 4f^2}}{2} = \begin{cases} 75 \\ 10 \end{cases}$

20. (4; 3; 12), $\left(\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; \frac{2}{3}\right)$

21. (6; 8; 10), (8; 6; 10)

22. (10; 15; 20), (−10; −15; −20)

23. (15; 20; 25)

24. (4; 9; 6)

25. (2; 3; 6); (3; 2; 6)

26. $r = \dfrac{2V}{P}$; $m = \dfrac{P^2}{4\pi V}$

27. $K_{1,2} = \dfrac{D}{2R}(1 \pm \sqrt{D^2 - 4R^2}$

28. (5; −3; 9; −7) (9; −7; 5; −3)

4. §. EGYENLŐTLENSÉGEK

b) Egyismeretlenes egyenlőtlenségek

1. $x < 1$

2. $x > 1$

3. $x \leqq 1$

4. $x \geqq 1$

5. $x \geqq -7{,}5$

6. $2 < x < 3$

7. $x < 2$; $x > 3$

8. $2 \leqq x \leqq 3$

9. $x \leqq 2$; $x \geqq 3$

10. $x \leqq 1$; $x \geqq 5$

11. $x \geqq \frac{1}{3}$; $x \geqq 3$

12. $\frac{2}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$

13. $-1 < x < 0$; $x > 1$

14. $x < -1$; $0 < x < 1$

15. $-1 \leqq x \leqq 0$; $x \geqq 1$

16. $x \leqq -1$; $0 \leqq x \leqq 1$

17. $x > 0$

18. $x < 0$

20. $0 < x < \frac{1}{2}$; $x > 1$

21. $x < 1$

22. $x < 0$, $1 < x < 3$

23. $x < \frac{7}{6}$; $x > \frac{3}{2}$

c) Abszolút érték

3. a; 0

4. 0; $-a$

5. $n > 10$

9. α-nak ε-nyi környezete

10. *a)* $-1 < x < 5$ *b)* $-1 < x < 3$ *c)* $x > 0$

5. §. GEOMETRIA

a) Planimetria

1. 0,6980; 0,4298; 19,3728
2. 200°; 28,648°; 401,072°; 0,573°
3. 140°
4. 30°; 60°; 90°
5. 0°; 22,5°; 45°; 67,5°; 90°
6. 30°; $2\sqrt{3}$
7. 6,28 m
8. 499,5 $\approx$ 500/perc
9. 5 mm
10. 5,02 $\approx$ 5 m
11. 29 cm; 156 cm
12. 11,28 $\approx$ 11,3 cm
13. 56,73 dm^2
14. 81,67 cm^2
15. 11,287 km
16. 16 m; 14,40 m
17. $r^2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=r^2\cdot 2{,}5274=252{,}74$ cm^2
18. $x=\sqrt{48}\approx 7$; $a=\sqrt{15{,}25}=3{,}9$; $x=3{,}25$ (ui.: $3:a=2{,}5:x$)
19. 20 cm
20. 5,66 cm
21. $x=210{,}83$ m ≈ 211 m ($u:8=136{,}5:182$ és $v:8=182:136{,}5$; ahonnan $u=6$; $v=10{,}6$. Az átfogó 227,5)
22. $8\sqrt{2}$ cm
23. 8 m
24. 10,45 cm
25. 2,333 m^2
26. $148{,}5\,\pi\approx 466{,}3$ cm
27. $3861\,\pi$ cm $=121{,}24$ m
28. $r=\frac{h^2+4m^2}{8m}=626$ m
29. $r=\frac{a^2+4m^2}{8m}$
30. $r=\frac{d^2+4m^2}{8m}$
31. $x=\sqrt{f(D-f)}$
32. $m=\frac{e}{2}\sqrt{3}$
33. $e=\frac{2m\sqrt{3}}{3}$
34. $a=\frac{R}{2}$; $x=R\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

b) Trigonometria

α) A derékszögű háromszög megoldása

1. *a)* $c=65$; $a=14°15'$
   b) $b=12$; $\alpha=36°52'$
   c) $c=5$; $b=1{,}231$
   d) $a=11{,}2$; $b=8{,}4$
2. 11°19′
3. $R=50$ kgs; $\alpha=36°52'$

4. 55°30′ 5. 2,543 km 6. 1,1268 km
7. 182,7 m 8. 4,7 mm 9. 28,5 m
10. 13,1 mm 11. 23,23 m 12. 7°40′
13. 51,7 m 14. 535,9 m
15. 353,8 cm; 360,3 cm; 8,838 R; 9,903 R
16. $\varrho = r \dfrac{\sin \dfrac{180°}{n}}{1 \mp \sin \dfrac{180°}{n}} = 2{,}52$ cm (1,77 cm)
17. 5,34 cm 18. 11,2%

β) Az általános háromszög megoldása

1. *a)* $\alpha = 25$; $b = 33$; $t = 330$
   b) $\alpha = 36°52'$; $c = 21$; $t = 126$
   c) $c = 15$; $\alpha = 53°7'$; $t = 84$
   d) $\alpha = 14°15'$; $\gamma = 112°38'$; $t = 24$
2. 484,7 m 3. 360 m
4. $x_1 = 1{,}329$ m; $x_2 = 11{,}275$ m 5. $x \approx 10$ m
6. $b = 2{,}8$ m; $x = 5{,}5$ m 7. $t = 463{,}9$ m²
8. $\alpha = 50°24'$ 9. 77°33′48″; 52°19′

c) Sztereometria

1. 7,85 gr/cm³ 2. 960 m³
3. 0,444 dm 4. 499,5 m ≈ 500 m
5. 1,7 cm 6. $4\sqrt{10}$ m² = 12,65 m²
7. 11,99 m² ≈ 12 m² 8. 4,055 dm³ ≈ 4 l
9. 19,7 cm; 91,3° 10. 152 gr
11. 0,0002 cm = $2 \cdot 10^{-4}$ cm 12. $F = 512\,\pi$; $V = \dfrac{1600\,\pi}{3}$

6. §. GONIOMETRIA

a) Szögfüggvények értelmezése és tulajdonságai

1. Pythagoras tételével = 13.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = 0{,}384; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = 0{,}923; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = 0{,}416;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = 2{,}4 \quad \sec\alpha = \frac{c}{b} = 1{,}083; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = 2{,}6$$

3. *a)* $\sin 165° = \sin (180° - 165°) = \sin 15° = 0{,}2588$
$\cos 165° = -\cos 15° = -0{,}9659$
$\operatorname{tg} 165° = -\operatorname{tg} 15° = -0{,}2679$

b) $\sin 250{,}3° = -\sin (250{,}3° - 180°) = -\sin 70{,}3° = -0{,}9415$
$\cos 250{,}3° = -\cos 70{,}3° = -0{,}3387$
$\operatorname{tg} 250{,}3° = \operatorname{tg} 70{,}3° = 2{,}7741$

c) $\sin 330°40' = -\sin (360° - 330°40') = -\sin 29°20' = -0{,}4899$
$\cos 330°40' = \cos 29°20' = 0{,}8718$
$\operatorname{tg} 330°40' = -\operatorname{tg} 29°20' = -0{,}5619$

d) $\sin (-46°) = -\sin 46° = -0{,}7193$
$\cos (-46°) = \cos 46° = 0{,}6946$
$\operatorname{tg} (-46°) = -\operatorname{tg} 46° = -1{,}0355$

e) $\sin (-200°) = -\sin 200° = +\sin 20° = 0{,}3420$
$\cos (-200°) = \cos 200° = -\cos 20° = -0{,}9397$
$\operatorname{tg} (-200°) = -\operatorname{tg} 200° = -\operatorname{tg} 20° = -0{,}3640$

f) $\sin 1000° = \sin (280° + 2 \cdot 360°) =$
$= \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$
$\cos 1000° = \cos 280° = \cos 80° = 0{,}1736$
$\operatorname{tg} 1000° = \operatorname{tg} 280° = -\operatorname{tg} 80° = -5{,}6713$

g) $\sin (-1952°) = -\sin 1952° = -\sin (152° + 5 \cdot 360°) =$
$= -\sin 152° = -\sin 28° = -0{,}4695$
$\cos (-1952°) = \cos 1952° = \cos 152° = -\cos 28° = -0{,}8829$
$\operatorname{tg} (-1952°) = -\operatorname{tg} 1952° = -\operatorname{tg} 152° = +\operatorname{tg} 28° = 0{,}5317$

4. *a)* $\frac{13\,\pi}{8} \mathrel{\widehat{=}} \frac{13 \cdot 280°}{8} = 292°30'$ ($\mathrel{\widehat{=}}$ olv.: megfelel.)
$\sin 292°30' = -0{,}9239$; $\cos 292°30' = 0{,}3827$; $\operatorname{tg} 292°30' = 2{,}4142$

b) $\frac{25\,\pi}{3} \mathrel{\widehat{=}} 1500°$

$\sin 1500° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 1500° = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 1500° = \sqrt{3}$

c) $-2 \mathrel{\widehat{=}} -\frac{2 \cdot 180°}{\pi} = -114{,}6°$
$\sin (-114{,}6°) = -0{,}9093$; $\cos (-114{,}6°) = -0{,}4162$;
$\operatorname{tg} (-114{,}6°) = 2{,}1842$

d) $19 \mathrel{\widehat{=}} 1089°$
$\sin 1089° = 0{,}1564$; $\cos 1089° = 0{,}9877$; $\operatorname{tg} 1089° = 0{,}1584$

5. *a)* 40°; 140° *b)* 220°; 320° *c)* 70°; 290°
d) 110°; 250° *e)* 56°; 236° *f)* 124°; 304°

6. *a)* $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin\beta = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \mp\frac{4}{3}$

c) $\sin\gamma = \pm\frac{0{,}5}{\sqrt{1+0{,}25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+0{,}25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) Mivel $1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{4u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{1-2u^2+u^4+4u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}$,

ezért $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ és $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

8. $\eta = 0{,}3$

b) Addiciós tételek

2. *a)* $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 0{,}258$

$\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0{,}965$

b) $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0{,}2588;$$

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cdot\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) = 0{,}9659$$

3. Előbbihez hasonló módon. Ui.: $75° = 45° + 30°$; $75° = 90° - 15°$; $105° = 90° + 15°$; $105° = 135° - 30°$; $105° = 180° - 75°$; $135° = 90° + 45°$; $135° = 180° - 45°$; $135° = 120° + 15°$; $22°30' = \frac{45°}{2}$ stb.

(Az eredményeket táblázatból ellenőrizzük!)

11. $x = \frac{c\sin\beta - \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $y = \frac{c\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ 12. $\frac{7}{5}$.

c) Goniometrikus egyenletek

1.[1] $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$; $x_3 = \frac{5\pi}{4}$; $x_4 = \frac{7\pi}{4}$

[1] A goniometrikus egyenletek gyökeit általában ívmértékben szokás kifejezni, de lehet szögmértékben is. — A megoldások közül csak a $0 \leq x < 2\pi$ intervallumba eső gyököket adjuk: a többi gyök 2π egész számú többszöröseinek hozzáadásával, ill. levonásával nyerhető.

2. $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$

3. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; 4. 0; π; $\frac{3\pi}{2}$

5. 0; 6. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

7. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$

8. Visszavezethető $\cos x = 0{,}2$ egyenletre, ahonnan
$x_1^0 = 78°28'$ és $x_2^0 = 281°32$

9. 0; $\frac{\pi}{2}$. Az egyenlet írható $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ alakban, ahonnan

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát I. $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, azaz $x = 0$ és

II. $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, azaz $x = \frac{\pi}{2}$. De az egyenlet írható

$\sin x = 1 - \cos x$, azaz $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$ alakban, ahonnan

$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0$. Tehát

I. $\sin\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = 0; \pi$; $x = 0$; $[x = 2\pi]$

II. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{2}$, $\left[x = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$;

Még harmadik módon is megoldható az egyenlet:

$\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1$, négyzetre emelve és rendezve:
$\sin^2 x - \sin x = 0$, azaz $\sin x\,(\sin x - 1) = 0$. Innen

I. $\sin x = 0$; $x = 0$, $x = \pi$

II. $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$.

Ám $x = \pi$ nem megoldása az eredeti egyenletnek. Ez a „hamis" gyök a négyzetreemelés folytán lép fel. (L. irracionális egyenletek!)

10. 36°52' 11. 0; π; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$

12. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ és $\sin x = \frac{1}{3}$ egyenlet gyökei

13. 0; π és $\cos x = -0{,}7$ egyenlet gyökei

14. $\operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{2}$ és $\operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{2}$ egyenletek gyökei

15. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; 16. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$.

7. §. ANALITIKUS SÍKGEOMETRIA

a) Két pont távolsága; felezőpont

1. *a)* (1; 0), (0 1), (−1; 0), (0; −1),

b) (1; 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (−1; 0),

$\left(-\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

2. *a)* (3; −4), (−5; −2), (−2; 1), (3; 5), (5; 0); (0; 2).
b) (−3; 4), (5; 2), (2; −1), (−3; −5), (−5; 0), (0; −2)
c) (−3; −4), (5; −2), (2; 1), (−3; 5), (−5; 0) (0; 2)
d) (4; 3), (2; −5), (−1; −2), (−5; 3), (0; 5), (−2; 0)

4. 5; $5\sqrt{5}$; 10

5. $y_1 = 13$; $y_2 = -3$

6. $y_{1,2} = -9 \pm 10\sqrt{2}$

7. $x = 7$; $y = 0$

8. $3\sqrt{2}$

9. (4; 7), $\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

b) Az egyenes analitikus geometriája

1. Az (1; −1) és (7; 3) koordinátájú pontok az egyenesen fekszenek, mert a koordináták kielégítik az egyenes egyenletét.

3. $x + y + 3 = 0$

4. $x\sqrt{3} + y = 4\sqrt{3}$

5. $t = \frac{7}{2}$

6. $a = 5$; $b = -8$

7. $3y - x\sqrt{3} = 15 - 3\sqrt{3}$

8. $5x - 7y + 15 = 0$

9. $4x - 3y = 1$; $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$; $\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$

10. $2x + 3y = 18$; $8x + 3y = 36$.

11. (2; 5)

12. A csúcspontok koordinátái:

(3; 5) (5; −2); (−2; 1) $k = \sqrt{41} + \sqrt{53} + \sqrt{58}$

13. $3x + 2y = 22$;

14. $7x + 5y = 0$

15. $2x + y = 5$;

16. $d = 4$.

c) Kúpszeletek

c) 1. *Kör*

1. *a)* $(x-4)^2+(y-3)^2=13$

b) $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+(y-3)^2=\frac{221}{25}$

c) $(x-3)^2+(y-2)^2=20$

d) $(x-10)^2+(y-10)^2=100$ és $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

e) $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-6)^2+(y-5)^2=25$

f) $(x+5)^2+y^2=25$ és $(x-5)^2+y^2=25$.

2. $u=3;\ v=9;\ r=\sqrt{10}$; 3. $(2;\ 3);\ (2;\ -3);\ t=12$

4. Metszéspontok: $(3;\ 1);\ (-1;\ -3)$; $d=4\sqrt{2}$ Felezőpont: $(1;\ -1)$ 5. A két egyenlet különbsége adja a hatványvonal egyenletét: $x+y=5$. 6. A körív sugara 50 m. Az $x^2+y^2=50^2$ kör $x_1=10$, $x_2=20$, $x_3=30$ helyekhez tartozó ordinátáiból 30-at levonva, kapjuk a keresett rúdhosszúságokat: 18,99; 15,83; 10.

8. Az érintési pont koordinátái $(\xi;\ \eta)$ kielégítik az érintő $[5\xi-3\eta=9]$ és a kör $[\xi^2+\eta^2=9]$ egyenletét. $(0;\ -3)$, $\left(\frac{45}{17};\ \frac{24}{17}\right)$; $d=5$.

c) 2. *Ellipszis*

1. *a)* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ *b)* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

c) $64x^2+100y^2=8100$

2. $a=5,\ b=3,\ c=4,\ e=\frac{4}{5},\ p=\frac{9}{5},\ y^2=\frac{18}{5}x+\frac{9}{25}x^2$

3. Metszéspontok: $(4;\ 3)$, $(5;\ 2)$; $d=\sqrt{2}$

4. $r_1=5{,}2;\ r_2=14{,}8$ 5. $d=10;\ 3x+4y=0$.

c) 3. *Hiperbola*

1. *a)* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; *b)* $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

c) $12x^2-y^2=128$ 2. $xy=-8$

3. $a=4,\ b=3,\ c=5,\ e=\frac{5}{4},\ p=\frac{9}{4},\ r_1=\frac{7}{2},\ r_2=\frac{23}{2}$

4. $y=2\sqrt{2x}$ és $y=-2\sqrt{2x}$ 5. $3x+4y=0$ és $3x-4y=0$

6. $\left(4;\ \frac{3}{2}\right)$ $\left(-4;\ -\frac{3}{2}\right)$ $(3;\ 2);\ (-3;\ -2)$.

c) 4. *Parabola*

1. $y^2=12x$ 2. $p=\frac{5}{2}$; $\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$ 3. $r=5$

4. A húr és parabola metszéspontjai:

$\left(\frac{5}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{27}{4}; \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ $d = 6$ 5. $d = 8\sqrt{5}$.

9. A fókusz koordinátái: (0; 2) a vezérvonal egyenlete: $y = 0$.

10. A rúdhosszúságok $l = 4 - 0{,}04x^2$ egyenletből számíthatók:

x	2,5	5	7,5
l	3,76	3	1,75

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. Magyar középiskolai tankönyvek és példagyűjtemények.
2. *Kokits:* A mennyiségtan elemei. (A Műszaki Egyetem esti előkészítő tanfolyamának matematikai jegyzete.)
3. *М. Я Выгодский:* Спрмаочник по элемертарной математике. — Гостехиздат, Москва, 1951.
4. *FR. A. Willers:* Elementar—Matematik (Dresden und Leipzig. Steinkopff.)
5. *Н Н. Никитин:* Решение задач в средней школе. (Издат. Акад. Пед. Наук РСФСР. Москва — 1953.)

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felel: Vágvölgyi Tibor igazgató
Műszaki vezető: Horváth János
Újranyomásra előkészítette: Ambrus Ferenc
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
A kézirat nyomdába érkezett: 1960. október — Megjelenés: 1961. január
Példányszám: 7000 — Terjedelem: 10,5 (A/5) ív, 64 ábra
Készült: matrica felhasználásával, íves magasnyomással,
az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint

0.12173 — Egyetemi Nyomda, Budapest — F. v.: Janka Gyula igazgató